

Theorem 2 aus §2.11

Theorem: Seien V, W endlich dimensionale Vektorräume über K mit geordneten Basen \mathcal{B} und \mathcal{C} . Für jede lineare Abbildung $T \in \text{Hom}_K(V, W)$ definieren wir die sogenannte duale Abbildung $T^* : W^* \rightarrow V^*$ durch

$$T^*(g) := g \circ T \quad \text{mit } g \in W^*$$

Es gilt:

- i) $T^* \in \text{Hom}_K(W^*, V^*)$
- ii) $[T^*]_{\mathcal{C}^*}^{\mathcal{B}^*} = ([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^T$

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass die Abbildung T^* wohl-definiert ist, d.h. dass $T^*(g) \in V^*$ für $g \in W^*$, was wiederum heisst, dass $T^*(g)$ eine lineare Abbildung von V nach K ist. Aus der Definition folgt, dass

$$T^*(g) : V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{g} K : v \mapsto T(v) \mapsto g(T(v))$$

also geht $T^*(g)$ von V nach K und da die Komposition von linearen Abbildungen linear ist, und sowohl T wie auch g linear sind, ist die Abbildung $T^*(g)$ linear.

i) Wir müssen nun zeigen, dass die Abbildung T^* selber ein Homomorphismus ist (d.h. linear). Es gilt für beliebige $g_1, g_2 \in W^*$ und $\lambda \in K$

$$T^*(g_1 + \lambda \cdot g_2) := (g_1 + \lambda \cdot g_2) \circ T = g_1 \circ T + \lambda \cdot g_2 \circ T =: T^*(g_1) + \lambda \cdot T^*(g_2)$$

Also wir haben $T^* \in \text{Hom}_K(W^*, V^*)$.

ii) Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V und $\mathcal{B}^* = (f_1, \dots, f_n)$ die dazu gehörende duale Basis d.h. $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ und sei $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ eine geordnete Basis von W und $\mathcal{C}^* = (g_1, \dots, g_m)$ die dazu gehörende duale Basis d.h. $g_i(w_j) = \delta_{ij}$. Sei $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ die $m \times n$ Darstellungsmatrix von T und $B = [T^*]_{\mathcal{C}^*}^{\mathcal{B}^*}$ die $n \times m$ Darstellungsmatrix von T^* . So gilt $T^*(g_j) \in V^*$ und ist also eine Linearkombination von \mathcal{B}^* und zwar genau gegeben durch die Einträge in der j .Spalte von B :

$$T^*(g_j) = \sum_{l=1}^n B_{lj} f_l$$

und somit gilt

$$T^*(g_j)(v_i) = \sum_{l=1}^n B_{lj} f_l(v_i) = \sum_{l=1}^n B_{lj} \delta_{li} = B_{ij} \quad (1)$$

Gleichzeitig gilt aber

$$(g_j \circ T)(v_i) = g_j(T(v_i)) = g_j \left(\sum_{k=1}^m A_{ki} w_k \right) = \sum_{k=1}^m A_{ki} g_j(w_k) = \sum_{k=1}^m A_{ki} \delta_{jk} = A_{ji} \quad (2)$$

Das vierte Gleichheitszeichen folgt aus der Linearität von g_j . Da nun aber die linken Seiten von (1) und (2) gleich sind gilt

$$B_{ij} = T^*(g_j)(v_i) := (g_j \circ T)(v_i) = A_{ji} = (A^T)_{ij}$$

und somit $B = A^T$ und die Behauptung folgt. ■