D-Math/Phys | Lineare Algebra I | HS 2016
Dr. Meike Akveld

Clicker Fragen

Frage 1

Sei R die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. So gilt

○ $R \in R$

○ $R \notin R$

Dies ist bekannt als die Russelsche Antimonie und führt zu einem Paradoxon. Nehmen wir nämlich an, dass R ein Element von R ist, so enthält R sich selber und ist somit kein Element von R. Ist anderseits R kein Element von R, so muss R sich selber enthalten und somit ist R ein Element von R.

Frage 2

Betrachten Sie die folgende Menge

$$P := \{p \in \mathbb{N} \,|\, p > 1 \land \forall m \in \mathbb{N} : (m|p \implies (m = 1 \lor m = p))\}$$

so gilt

○ P hat endlich viele Elemente

$\surd$ ○ P hat unendliche viele ELemente

Es geht hier darum die Beschreibung der Menge P aus der Formelsprache in die "Alltagssprache" zu übersetzen. P besteht aus allen natürlichen Zahlen ($\mathbb{N}$) die grösser als eins sind und ($\land$) für welche gilt, wenn m ein Teiler von p ist ($m|p$) so ist dieser Teiler entweder gleich 1 oder gleich p. Die ist genau die Charakterisierung einer Primzahl. Und somit ist P die Menge der Primzahlen und diese ist bekanntlich (beweisen Sie dies selber!) unendlich.

Frage 3

Wir betrachten in dieser Aufgabe nur Relationen auf $\{1,2,3\}$. Welche der folgenden Aussagen ist oder sind richtig?

$\surd$ ○ Die minimale Anzahl der Elemente einer Äquivalenzrelation ist 3.

$\surd$ ○ Die Menge $\{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3)\}$ bildet eine Äquivalenzrelation.

○ Die kleinste Äquivalenzrelation, die $(1,2)$ und $(2,3)$ enthält, hat 7 Elemente.

$\surd$ ○ Die Anzahl der Äquivalenzrelationen mit 5 Elementen ist 3.

Zu i) die Relexivitätseigenschaft besagt dass für alle Elemente gelten muss, dass xRx. D.h. dass jede Äquivalenzrelation die Elemente $(1,1),(2,2),(3,3)$ enthalten muss. Es lässt sich leicht überprüfen dass diese drei Elemente eine Äquivalenzrelation bilden (Symmetrie ist klar und bei der Transitivität gibt's in diesem Fall nichts zu überprüfen).

Zu ii) Relexivität und Symmetrie sind klar. Die Transitivität folgt: $1R1$ und $1R3$ impliziert $1R3$ und genauso für $(3,1)$ und $(1,1)$.

Zu iii) die Reflexivität besagt dass wir sicher die Paare $(1,1),(2,2)$ und $(3,3)$ brauchen. Aus der Symmetrie folgt dass wir zusätzlich $(2,1)$ und $(3,2)$ dazu nehmen müssen. Nun besagt aber die Transitivität dass wenn die Paare $(1,2)$ und $(2,3)$ dabei sind auch $(1,3)$ dabei ist und somit auch $(3,1)$ und somit haben wir mindestens 9 Elemente.

Zu iv) Ein Beispiel ist die Äquivalenzrelation in ii). Wählt man stattdessen das Paar $(1,2)$ oder $(2,3)$ mit "Spiegelbild" so haben wir alle Möglichkeiten mit 5 Elementen.

Frage 4

Betrachte die Abbildung $f : A \to B$ mit $B_1, B_2 \subset B$. Die Aussage

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

√ ○ ist richtig

○ ist falsch

Wir erinnern an die Definition des Urbildes $f^{-1}(S)$ von $S \subset B$ unter f als

$$f^{-1}(S) := \{x \in A \,|\, f(x) \in S\}$$

(nicht zu verwirren mit der Umkehrfunktion f^{-1} die nur exisitiert wenn f bijektiv ist) und stellen fest, dass

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\iff f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\iff f(x) \in B_1 \,\text{und}\, f(x) \in (B_2) \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \,\text{und}\, x \in f^{-1}(B_2) \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

Frage 5

Welche Elemente von $\mathbb{Z}_6$ haben eine Inverse für die Multiplikation?

○ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

○ $\{1, 3, 5\}$

√ ○ $\{1, 5\}$

○ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

○ keine

Wir betrachten die Cayley-Tafel für die Multiplikation in $\mathbb{Z}_6$

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Man sieht sofort, dass 0 kein Inverses Element hat und dass 1 das neutrale Element ist (da $\forall a \in \mathbb{Z}_6 : 1 \cdot a = a$). Die Frage ist nun für welche $a \in \mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}$ existiert ein $b \in \mathbb{Z}_6$ mit $a \cdot b = 1$ und man sieht, dass dies nur für 1 und 5 möglich ist.

Frage 6

Sei $V = \{(x,y) \,|\, x,y \in \mathbb{R}\}$ und definiere die folgende Verknüpfungen

$$V \times V \to V : ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mapsto (x_1,y_1) + (x_2,y_2) := (x_1 + 2x_2, y_1 + 3y_2)$$

$$\mathbb{R} \times V \to V : (\lambda,(x,y)) \mapsto \lambda \cdot (x,y) := (\lambda x, \lambda y)$$

○ so ist V ein Vektorraum

√ ○ so ist V kein Vektorraum

Man überprüft leicht, dass die Verknüpfung "Addition" weder kommutativ noch assoziativ ist.

Frage 7

Sei V ein Vektorraum über K und $W \subset V$ eine Teilmenge. Die Aussage:

$$\forall u \in V \,\forall \lambda \in K \,:\, \lambda u \in W \implies 0_V \in W$$

○ ist richtig

√ ○ ist falsch

Wenn wir annehmen könnten, dass W nicht-leer ist, so könnten wir ein beliebiges Element w aus W wählen und da $0 \in K$ hätten wir $0 \cdot w \in W$ also $0_V = 0 \cdot w \in W$. Wir wissen aber nicht, dass W nicht-leer ist und deshalb ist die Aussage falsch. (Wenn $W = \emptyset$ so gäbe es kein einziges Element in $w \in W$ mit der Eigenschaft $0 \cdot w = 0_V$.)

Frage 8

Der Nullvektor ist eine Linearkombination von jeder beliebigen nicht-leeren Menge von Vektoren

√ ○ richtig

○ falsch

Da die Menge nicht leer ist, gibt es einen Vektor u und somit gilt $0_V = 0 \cdot u$. Wir haben also der Nullvektor als Linearkombination geschrieben.

Frage 9

Sei S eine Teilmenge eines Vektorraumes V, so ist $\text{span}(S)$ gleich zu der Schnittmenge aller Unterräumen W, die S als Teilmenge besitzen.

√ ◯ richtig

◯ falsch

$\text{span}(S)$ ist nach Theorem 1, §2.3, der kleinste Unterraum, der S enthält. Deshalb gilt für jeden anderen Unterraum W_i der S enthält, dass $\text{span}(S) \subset W_i$ und somit

$$\text{span}(S) \subset \bigcap_{S \subset W_i} W_i$$

Gleichheit gilt weil $\text{span}(S)$ selber auch eine der W_i's ist.

Frage 10

Sei S ein Erzeugendensystem von V, so kann man jeder Vektor in V als eindeutige Linearkombination der Elemente in S schreiben

◯ richtig

√ ◯ falsch

Ein Erzeugendensystem muss nicht linear unabhängig sein und deshalb ist die Eindeutigkeit nicht garantiert.

Frage 11

Die Menge $\{0_V\}$ ist linear abhängig

◯ richtig

√ ◯ falsch

Eine Menge S ist linear unabhängig wenn sie nicht linear abhängig ist und eine Menge ist linear abhängig wenn es eine nicht-triviale Linearkombination der Elemente von S gibt, die den Nullvektor darstellt. Mit nicht-trivial meinen wir, dass nicht alle Skalaren gleich Null gewählt werden dürfen. Da aber jede beliebige Linearkombination der Elemente von $\{0_V\}$ den Nullvektor ergibt, insbesondere die nicht-triviale, ist die Menge somit linear abhängig ($\lambda \cdot 0_V = 0_V \forall \lambda \in K$)

Frage 12

Sei V ein Vektorraum und $S_1 \subset S_2 \subset V$. Wenn S_2 linear unabhängig ist, so ist S_1 dies auch.

√ ◯ richtig

◯ falsch

S_2 linear unabhängig bedeutet, dass es nicht möglich ist der Nullvektor als nicht-triviale Linearkombination der Elemente von S_2 darzustellen. Wenn S_1 nun linear abhängig wäre, so könnten wir mit den Elementen von S_1 den Nullvektor nicht-trivial als Linearkombination darstellen. Da aber alle Elemente von S_1 auch in S_2 enthalten sind, ist dies ein Widerspruch.

Frage 13

Was ist die Dimenson desVektorräumes $\mathbb{C}$?

◯ $\dim(\mathbb{C}) = 1$

◯ $\dim(\mathbb{C}) = 2$

√ ◯ Es fehlen Angaben um dies zu entscheiden

Wie in der Vorlesung besprochen hängt die Dimension eines Vektorräumes davon ab was der zu grundlegender Körper ist. Betrachen wir $\mathbb{C}$ als Vektorraum über den Körper $\mathbb{C}$ so kann man als Basis $\mathcal{B} = \{1\}$ wählen, da $< \{1\} >:= \{\lambda \cdot 1 \,|\, \lambda \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}$, also gilt $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$. Betrachtet man aber nun $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ so reicht die obige Basis nicht, da $< \{1\} >:= \{\lambda \cdot 1 \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \neq \mathbb{C}$. Wählen wir stattdessen als Basis $\mathcal{B} = \{1, i\}$, so ist die in der Tat eine Basis (überprüfen Sie selber die beide Eigenschaften die eine Basis haben muss) und somit gilt $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.

Frage 14

Seien V und W zwei Vektorräume. Betrachten Sie das kartesische Produkt $V \times W$ mit der Vektorraumstruktur

$$\lambda(v, w) := (\lambda v, \lambda w) \quad \text{und} \quad (v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$

Seien $\mathcal{B}_V = \{e_1, \dots e_n\}$, $\mathcal{B}_W = \{f_1, \dots f_m\}$ Basen von V und W. So ist

$$\mathcal{B} := \{(e_i, f_j) | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

eine Basis von $V \times W$

○ richtig

√ ○ falsch

Ich habe in der Vorlesung gezeigt, dass dies nicht stimmt wenn $V = W = \mathbb{R}$. Seien nun also V und W mehr als 1-dimensional. Nach Definition gilt $V \times W := \{(v, w) \,|\, v \in V, w \in W\}$. Insbesondere sind die Vektoren $(e_i, 0_W)$ und $(0_V, f_j)$ Elemente von $V \times W$. Es ist aber nicht möglich sie als Linearkombination der angeblichen Basis zu schreiben und deshalb kann es keine Basis sein. Konret: Es ist unmöglich ($\mathcal{B}_W$ is linear unabhängig) $\lambda_{ij} \in K$ so zu bestimmen, das gilt

$$(e_i, 0_W) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij}(e_i, f_j)$$

Frage 15

Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax + b$$

ist eine lineare Abbildung

○ richtig

√ ○ falsch

Da $f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) + b \neq ax_1 + b + ax_2 + b = f(x_1) + f(x_2)$ ist dies nicht allgemein wahr, sonder nur wenn $b = 0$.

Frage 16

Seien V und W Vektorräume. Gegeben $v_1, v_2 \in V$ und $w_1, w_2 \in W$ so existiert eine lineare Abbildung mit $T(v_1) = w_1$ und $T(v_2) = w_2$.

○ richtig

√ ○ falsch

Dies ist nicht allgemein wahr, wenn z.B. v_1 und v_2 linear abhängig sein, d.h. $v_1 = \lambda v_2$ für irgendein $\lambda \in K$, so muss gelten $T(v_1) = T(\lambda v_2) = \lambda T(v_2)$ was impliziert, dass $w_1 = \lambda w_2$ was natürlich nicht für beliebige $w_1, w_2 \in W$ gilt. Die Aussage wäre aber wahr wenn v_1 und v_2 linear unabhängig wären.

Frage 17

Betrachte den Vektorraum $M_{2\times 2}(K)$ mit der standard geordneten Basis

$$\mathcal{B} = \left(E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

und die lineare Abbildung

$$T : M_{2\times 2}(K) \to K : A \mapsto \mathrm{Tr(A)}$$

wobei wir für K die Basis $\{1\}$ wählen. Was ist die Darstellungsmatrix $[T]_{\mathcal{B}}^{\{1\}}$?

○ $A_{11} + A_{22}$

√ ○ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

○ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Wir haben in der Vorlesung gelernt, dass die j. Spalte der Darstellungsmatrix nichts anderes ist als $[T(v_j)]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ wobei v_j der j. Basisvektor aus der geordneten Basis $\mathcal{B}$ ist. Nun gilt in diesem Fall $T(E_1) = T(E_4) = 1 = 1 \cdot 1$ und $T(E_2) = T(E_3) = 0 = 0 \cdot 1$ und da der Zielbereich nur 1-dimensional ist, haben die Spalten nur Länge 1 und sind somit 1, 0, 0 und 1. Das Resultat ist also eine 1×4 Matrix.

Frage 18

Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ und I_n die Identitätsmatrix. So gilt

$$A^2 = I_n \implies A = I_n \vee A = -I_n$$

◯ richtig

√ ◯ falsch

Für $n = 1$ ist diese Aussage richtig ($a^2 = 1 \implies a = 1 \vee a = -1$). Für Matrizen stimmt sie aber nicht, als Gegenbeispiel betrachten wir die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Offensichtlich gilt $A^2 = I_2$ aber die Implikation ist nicht richtig. Diese Matrix gehört zu der linearen Abbildung $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die geometrisch zu interpretieren ist als Spiegelung an der x-Achse.

Frage 19

Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume und $T \in \mathrm{Hom(V, W)}$. Falls T invertierbar ist, so gilt $\dim(V) = \dim(W)$.

√ ◯ richtig

◯ falsch

Aus der Dimenionsformel

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker(T)}) + \dim(\mathrm{Im(T)})$$

und T invertierbar folgt $\dim(\mathrm{Ker(T)}) = 0$, also $\dim(V) = \dim(\mathrm{Im(T)})$ und da $\mathrm{Im(T)} = \mathrm{W}$ ist die Aussage damit bewiesen.

Frage 20

Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume über K. Welche der folgenden Aussagen sind richtig

◯ $\mathrm{Hom(V, W)} = \mathrm{Hom(W, V)}$

√ ◯ $\dim(\mathrm{Hom(V, W)}) = \dim(\mathrm{Hom(W, V)})$

Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass

$$\mathrm{Hom(V, W)} \cong \mathrm{Mat_{n\times m}(K)}$$

und somit

$$\mathrm{Hom(W, V)} \cong \mathrm{Mat_{m\times n}(K)}$$

Wenn $n \neq m$ sind diese beide Matrizenräume nicht gleich und damit die Räume der Homomorphismen auch nicht. Die Dimensionen stimmen aber überein da $m \cdot n = n \cdot m$.

Frage 21

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum, so gilt

$$\dim(V) = \dim(V^*)$$

√ ◯ richtig

◯ falsch

Sei $\dim(V) = n$ so gilt

$$\dim_K(V^*) = \dim_K(\mathrm{Hom(V,K)}) = \mathrm{dim_K(V) \cdot dim_K(K) = n \cdot 1 = dim_K(V)}$$

Frage 22

Sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) = 4$, so gibt es ein $f \in V^*$ mit $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$

◯ richtig

√ ◯ falsch

$f \in V^*$ bedeutet, dass f eine lineare Abbildung von V nach K ist. Aus der Dimensionsformel folgt

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

Da aber $\mathrm{Im}(f) \subset K$ gilt $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq 1$ und aus $\dim(V) = 4$ folgt dann sofort $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geq 3$

Frage 23

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

√ ◯ Eine Elementarmatrix ist immer quadratisch

◯ Die einzige Einträge in einer Elementarmatrix sind Einsen und Nullen.

√ ◯ Die $n \times n$ Identitätsmatrix ist eine Elementarmatrix.

◯ Das Produkt von zwei Elementarmatrizen ist eine Elementarmatrix.

◯ Die Summe von zwei Elementarmatrizen ist eine Elementarmatrix.

√ ◯ Die Inverse einer Elementarmatrix ist eine Elementarmatrix.

√ ◯ Die Transponierte einer Elementarmatrix ist eine Elementarmatrix.

i) Richtig: Dies ist per Definition so (eine Elemenarmatrix ist erhalten durch eine elementare Zeilen- (oder Spalten-)Umformung auf die Identitätsmatrix.

ii) Falsch: Wenn man die i. Zeile mit einem Faktor c multipliziert so steht an der Stelle $E_{i,i}$ den Faktor c.

iii) Richtig: Wenn man bei der Identitätsmatrix zu der i.Zeile 0 mal die j.Zeile addiert so ist das Resultat wiederum die Identitätsmatrix. ist

iv) Falsch: Gegenbeispiel

$$E_1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M$$

E_1 und E_2 sind Elementarmatrizen. M ist aber das Resultat von Vertauschen der 1. und 2. Zeile und Vertauschen der 3. und 4. Zeile und das ist mehr als **eine** elementare Umformung.

v) Falsch: Gegenbeispiel

$$E_1 + E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = M$$

Auch hier sind wieder E_1 und E_2 Elementarmatrizen, aber M nicht.

vi) Richtig: Folgt as Theorem 2, §3.1.

vii) Richtig: Überlegen Sie selber wie die Elementarmatrizen und ihre Transponierten aussehen und zu welchen elementaren Umformungen diese gehören.

Frage 24

Es ist möglich, dass ein System von n linearen Gleichungen in m Variablen über $\mathbb{R}$

$\surd$ ◯ keine Lösung hat

$\surd$ ◯ genau eine Lösung hat

◯ genau zwei Lösungen hat

$\surd$ ◯ unendlich viele Lösungen hat

i) Das folgende Gleichungssystem $(n = 2, m = 2)$ hat keine Lösung

$$\begin{cases} x + y & = 1 \\ x + y & = 2 \end{cases}$$

ii) Das folgende Gleichungssystem $(n = 2, m = 2)$ hat genau eine Lösung, nämlich $x = 1$ und $y = 1$

$$\begin{cases} x + y & = 2 \\ x - y & = 0 \end{cases}$$

iii) Die Lösungsmenge eines homogenen LGSs ist ein Unterraum und die eines inhomgenen LGSs ist ein affiner Raum; beide haben über $\mathbb{R}$ entweder nur ein Element (der Nullraum) oder unendlich viele - zwei Lösungen ist also nicht möglich.

iv) Das folgende Gleichungssystem $(n = 2, m = 2)$ hat unendlich viele Lösungen, nämlich alle Paare der Form $(x, 2 - x)$ für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y & = 2 \\ 2x + 2y & = 4 \end{cases}$$

Frage 25

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ◯ Jedes lineare Gleichungssystem hat mindestens eine Lösung
- ◯ Jedes lineare Gleichungssystem hat maximal eine Lösung
- √ ◯ Jedes homogene lineare Gleichungssystem hat mindestens eine Lösung
- ◯ Jedes System von n linearen Gleichungen in n Unbekannten hat mindestens eine Lösung
- ◯ Jedes System von n linearen Gleichungen in n Unbekannten hat maximal eine Lösung
- ◯ Wenn das homogene, zu einem linearen Gleichungssystem gehörende, System eine Lösung hat, so hat auch das inhomogene System eine Lösung
- √ ◯ Wenn die Koeffizientenmatrix gehörend zu einem homogenen linearen Gleichungsssytem invertierbar ist, so hat das System keine nicht-triviale Lösungen

i) Das folgende Gleichungssystem ($n = 2, m = 2$) hat keine Lösung

$$\begin{cases} x + y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{cases}$$

ii) Das folgende Gleichungssystem ($n = 2, m = 2$) hat unendlich viele Lösungen, nämlich alle Paare der Form $(x, 2 - x)$ für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y &= 2 \\ 2x + 2y &= 4 \end{cases}$$

iii) Das homogene LGS $Ax = 0$ hat sicherlich $x = 0$ als Lösung.

iv) siehe i)

v) siehe ii)

vi) Das folgende homogene Gleichungssystem ($n = 2, m = 2$) hat eine Lösung ($x = 0, y = 0$ ist eine, es gibt aber noch viele andere)

$$\begin{cases} x + y &= 0 \\ 2x + 2y &= 0 \end{cases}$$

aber das entsprechende inhomogene System hat keine Lösungen

$$\begin{cases} x + y &= 1 \\ 2x + 2y &= 3 \end{cases}$$

vii) Betrachte das homogene LGS $Ax = 0$ mit $A \in \mathrm{Gl}_n(K)$ so gilt $A^{-1}Ax = x = 0$ und somit ist $x = 0$ die eindeutige Lösung dieses Systems.

Frage 26

Sei A eine $n \times n$ Matrix und sei B entstanden aus A durch vertauschen der i. und j. Zeile (o.B.d.A. $j > i$). Wie viel mal müsste man benachbarte Zeilen vertauschen, um von A zu B zu gelangen?

○ $2(j-i)$

○ $j-i$

√ ○ $2(j-i)-1$

○ $2(j-i)+1$

Vertauscht man die Zeile $A_{(i)}$ mit seinen Nachbarn unten bis sie unter der Zeile $A_{(j)}$ steht, so muss man $j-i$ mal vertauschen. Vertauscht man nun die Zeile $A_{(j)}$ mit seinen Nachbarn oben bis sie oberhalb von $A_{(i+1)}$ steht, so muss man $j-i-1$ mal vertauschen und somit das Resultat.

Frage 27

Eine Determinante ist ein Element von $\mathrm{Hom}(M_{n\times n}(K), K)$

○ richtig

√ ○ falsch

Die Determinante ist eine multilineare Abbildung, d.h. u.A. dass $\delta(cA) = c^n\delta(A)$ und damit ist die Abbildung nicht linear (ausser für $n = 1$).

Frage 28

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ◯ Sei B entstanden aus A durch vertauschen von zwei Spalten, so gilt $\det(A) = \det(B)$
- ◯ Sei B entstanden aus A durch multiplizieren einer Spalte mit einem Faktor c, so gilt $\det(A) = \det(B)$
- √ ◯ Sei B entstanden aus A durch addieren eines Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile, so gilt $\det(A) = \det(B)$
- ◯ $\det(I_n) = 0$
- √ ◯ Wenn zwei Spalten von A gleich sind, so gilt $\det(A) = 0$
- √ ◯ Die Determinante einer unteren Dreiecksmatrix ist das Produkt der Einträgen auf der Diagonale
- ◯ $\det(A^T) = -\det(A)$
- √ ◯ $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- √ ◯ A ist invertierbar genau dann wenn $\det(A) \neq 0$

Folgt alles direkt aus der Vorlesung (Definitionen und Sätzen).

Frage 29

Wenn eine reelle Matrix einen Eigenvektor hat, so hat es unendlich viele Eigenvektoren

- √ ◯ richtig
- ◯ falsch

Sei $u \in K^n$ einen Eigenvektor von $A \in M_{n\times n}(K)$ d.h. $\exists\lambda \in K$ mit $Au = \lambda u$. Beachte, dass für $\mu \neq 0$

$$A(\mu u) = \mu(Au) = \mu(\lambda u) = \lambda(\mu u)$$

und somit ist μu auch einen Eigenvektor $\forall \mu \in K^x$ für den gleichen Eigenwert λ.

Frage 30

Betrachte die folgende beide Aussagen:
I: Ähnliche Matrizen haben immer die gleichen Eigenwerte
II: Ähnliche Matrizen haben immer die gleichen Eigenvektoren

- ◯ Beide Aussagen sind richtig
- √ ◯ Aussage I ist richtig und Aussage II ist falsch
- ◯ Aussage I ist falsch und Aussage II ist richtig
- ◯ Beide Aussagen sind falsch

Seien A und B ähnliche Matrizen so existiert ein $Q \in \mathrm{Gl}_n(K)$ mit $A = Q^{-1}BQ$. Sei u ein Eigenvektor von A mit Eigenvalue λ d.h. $Au = \lambda u$ so folgt

$$\left(Q^{-1}BQ\right)u = \lambda u \iff (BQ)\,u = Q(\lambda u) \iff B\,(Qu) = \lambda\,(Qu)$$

und somit ist Qu ein Eigenvektor von B zum Eigenwert λ. Und damit hat B die gleiche Eigenwerte wie A aber nicht unbedingt die gleiche Eigenvektoren.