Ist $\infty = \infty$?

Definition: Eine Menge heisst *abzählbar (unendlich)*, falls sie die Kardinalität $|\mathbb{N}|$ hat, oder, in anderen Worten, gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist. Die Kardinalität von $\mathbb{N}$ wird auch $\aleph_0$, gesprochen Aleph-0, genannt.

Behauptung: $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ *oder äquivalent* $\aleph_0 < c$*, wobei* c *die Mächtigkeit des Kontinuums* $(\mathbb{R})$ *ist.*

Beweis:

- **Schritt 1:** Man zeigt zuerst (Übung!), dass $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$ indem man zeigt dass $\mathbb{R} \to (0,1); x \mapsto \frac{1}{\pi}\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right)$ eine Bijektion ist. (Zwei Mengen sind gleichmächtig, wenn eine Bijektion zwischen den beiden existiert).

- **Schritt 2:** Wir wollen nun zeigen, dass $|\mathbb{N}| < |(0,1)|$ und machen dies mit einem Widerspruchsbeweis, d.h. wir nehmen an, dass so eine Bijektion existiert und nennen sie $f : \mathbb{N} \to (0,1)$. Wenn wir zeigen können, dass f entweder nicht injektiv oder nicht surjektiv (dies werden wir tun) ist, erhalten wir den gewünschten Widerspruch und haben damit gezeigt, dass die Kardinalitäten nicht gleich sind.

  Jede Zahl in $(0,1)$ lässt sich als (endliche oder unendliche, vergl. $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$) Dezimalzahl schreiben. Also tun wir das:

  $$\begin{aligned} f(1) &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\dots \\ f(2) &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\dots \\ f(3) &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\dots \\ f(4) &= 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

  wobei $a_{ij} \in \{0,1,2,\dots,8,9\}$ für $i,j \in \mathbb{N}$ die Ziffern in der Dezimaldarstellung sind.

- **Schritt 3:** Wir konstruieren nun eine neue Zahl r und zeigen, dass $\forall i : r \neq f(i)$ aber $r \in (0,1)$ und somit ist die Abbildung f nicht surjektiv und damit ist der Widerspruch gefunden. Sei

  $$a_i := \begin{cases} a_{ii} + 2 & \text{falls} \quad a_{ii} \leq 4 \\ a_{ii} - 2 & \text{falls} \quad a_{ii} \geq 5 \end{cases}$$

  und definiere die Zahl r als $r := 0.a_1a_2a_3a_4\dots$. Nun gilt $a_1 \neq a_{11}$ also $r \neq f(1)$, $a_2 \neq a_{22}$ also $r \neq f(2)$ und allgemein $a_i \neq a_{ii}$ und daraus folgt $r \neq f(i)$ für alle i. $\blacksquare$