Lösung 1: Mengenlehre

1. Seien $X, Y \subset U$, dann gilt $X \subset X \cup Y$. Diese einfache Beobachtung wird im folgenden mehrfach verwendet.

a) Wir zeigen

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

"$\subset$" Sei $x \in A \cup (B \cap C)$, also $x \in A$ oder $x \in B \cap C$. Falls $x \in A$, dann gelten $x \in A \subset A \cup B$ und $x \in A \subset A \cup C$ und folglich $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Wenn $x \in B \cap C$, dann $x \in B \subset A \cup B$ und $x \in C \subset A \cup C$, also folglich ebenfalls $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

"$\supset$" Sei $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ und nehmen wir an, dass $x \notin A$. Dann folgt aus $x \in A \cup B$ dass $x \in B$ und aus $x \in A \cup C$ dass $x \in C$. Insbesondere $x \in B \cap C$ und also $x \in A \cup (B \cap C)$. Falls $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ und $x \notin B \cap C$, dann folgt aus dem ersten Teil des obigen Arguments, dass $x \in A$. Also gilt ebenso $x \in A \cup (B \cap C)$.

Als nächstes beweisen wir

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

"$\subset$" Sei $x \in A \cap (B \cup C)$, also $x \in A$ und entweder $x \in B$ oder $x \in C$. Falls $x \in B$, dann ist also $x \in A \cap B$ und insbesondere $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Wenn $x \in C$, dann $x \in A \cap C$ und ebenso $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

"$\supset$" Sei $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Falls $x \in A \cap B$, dann $x \in A$ und $x \in B \subset B \cup C$ und folglich $x \in A \cap (B \cup C)$. Analog argumentiert man, wenn $x \in A \cap C$.

2. a) "$\Rightarrow$" Sei $A \not\subset B$. Dann existiert $x \in A \setminus B$ und also $x \notin A \cap B$. Folglich $A \cap B \neq A$.

"$\Leftarrow$" Sei $A \subset B$ und $x \in A$, dann automatisch $x \in B$ und also $x \in A \cap B$. Also gilt $A \subset A \cap B$. $A \cap B \subset A$ ist klar und folglich $A \cap B = A$.

b) Wir zeigen zuerst, dass für zwei Teilmengen $A, B \subset U$ gilt $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$. Für den Beweis verwenden wir, dass $X^c \subset Y^c \Leftrightarrow Y \subset X$. Beachte hierfür zuerst, dass es reicht zu zeigen, dass $X^c \subset Y^c \Rightarrow Y \subset X$. Dann folgt nämlich

$$X = (X^c)^c \subset (Y^c)^c = Y \Rightarrow Y^c \subset X^c$$

Bitte wenden!

Um $X^c \subset Y^c \Rightarrow Y \subset X$ zu beweisen, sei $X^c \subset Y^c$ und $x \in Y$. Dann ist $x \notin Y^c$ und insbesondere $x \notin X^c$, also $x \in X$. Wir beweisen nun die eingangs formulierte Behauptung.

"$\subset$" Wenn $x \in A \setminus B$, dann ist $x \in A$ und $x \notin B$, insbesondere $x \notin A \cap B$, da $A \cap B \subset B$. Also ist $x \in A \setminus (A \cap B)$.

"$\supset$" Ist $x \notin A \setminus B$, dann entweder $x \notin A$ oder $x \in B$. Wenn $x \notin A$, dann auch $x \notin A \setminus (A \cap B)$. Sei also $x \in B$. Wenn $x \in A$, dann $x \in A \cap B$ und darum $x \notin A \setminus (A \cap B)$. Wenn $x \notin A$, dann ist wie vorher auch $x \notin A \setminus (A \cap B)$. Es gilt also $(A \setminus B)^c \subset \big(A \setminus (A \cap B)\big)^c$ und folglich $A \setminus (A \cap B) \subset A \setminus B$.

Unter Verwendung der Distributivitätsgesetze impliziert das soeben gezeigte:

$$\begin{aligned} C \setminus \big((C \cap A) \cup (C \cap B)\big) &= C \setminus \big(C \cap (A \cup B)\big) = C \setminus (A \cup B) \\ C \setminus \big((C \cap A) \cap (C \cap B)\big) &= C \setminus \big(C \cap (A \cap B)\big) = C \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$

und wegen $C \setminus (C \cap A) = C \setminus A$ und $C \setminus (C \cap B) = C \setminus B$ können wir zur Lösung der Aufgabe o.B.d.A.[1] annehmen, dass $A, B \subset C$. Es reicht also zu zeigen, dass

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \text{ und } (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Wir beginnen mit der ersten Aussage $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$:

"$\subset$" Sei $x \notin A \cup B$, dann ist $x \notin A$ und $x \notin B$, also $x \in A^c$ und $x \in B^c$, folglich $x \in A^c \cap B^c$.

"$\supset$" Sei $x \in A^c \cap B^c$, dann ist $x \in A^c$ und B^c, also ist x weder in A, noch in B und folglich $x \notin A \cup B$. Dies zeigt $x \in (A \cup B)^c$.

Wir zeigen die zweite Aussage $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$:

"$\subset$" Sei $x \notin A \cap B$, dann ist $x \notin A$ oder $x \notin B$, also $x \in A^c$ oder $x \in B^c$, folglich $x \in A^c \cup B^c$.

"$\supset$" Sei $x \in A^c \cup B^c$, dann ist $x \in A^c$ oder B^c, also ist entweder $x \notin A$ oder $x \notin B$ und folglich $x \notin A \cap B$. Dies zeigt $x \in (A \cap B)^c$.

c) Sei $\mathbb{N}_N := \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq N\}$ und für $j \in \mathbb{N}$ sei $j\mathbb{N} := \{jn \mid n \in \mathbb{N}\}$. Wir bezeichnen die gesuchte Menge mit E, dann ist beispielsweise

$$\begin{aligned} E =& \{n \in \mathbb{N}; n \in \mathbb{N}_N \wedge n \notin 2\mathbb{N} \wedge n \notin 3\mathbb{N} \wedge n \notin 5\mathbb{N} \wedge n \notin 7\mathbb{N} \wedge n \notin 11\mathbb{N}\} \\ =& \mathbb{N}_N \cap (2\mathbb{N})^c \cap (3\mathbb{N})^c \cap (5\mathbb{N})^c \cap (7\mathbb{N})^c \cap (11\mathbb{N})^c \\ =& \mathbb{N}_N \cap (2\mathbb{N} \cup 3\mathbb{N} \cup 5\mathbb{N} \cup 7\mathbb{N} \cup 11\mathbb{N})^c \end{aligned}$$

[1] Gängige Abkürzung für "ohne Beschränkung der Allgemeinheit". Im Englischen häufig w.l.o.g. für "without loss of generality".

3. **a)** $E = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Die so durch A und B definierte Menge E wird als *symmetrische Differenz* zwischen A und B bezeichnet und man schreibt

$$A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Die symmetrische Differenz lässt sich äusserst intuitiv durch ein sogenanntes Venn-Diagramm illustrieren (siehe Abbildung 1). Venn-Diagramme sind im Allgemeinen äusserst nützliche Werzeuge, um Mengen zu beschreiben und Beweise zu motivieren. Zeichnen Sie entsprechende Venn-Diagramme für die Vereinigung $A \cup B$ und den Durchschnitt $A \cap B$ und vergleichen Sie Ihr Resultat mit [1, pp. 132-134]. Versuchen Sie zudem, Venn-Diagramme zu den anderen Aufgaben (insbesondere Aufgaben 1 und 3) zu zeichnen.

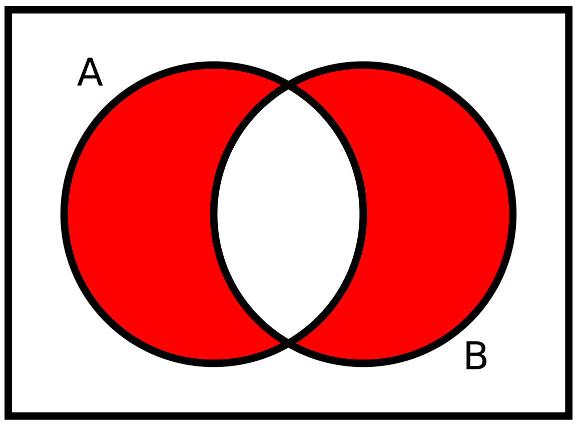

Abbildung 1 – Die symmetrische Differenz $A\Delta B$ der Mengen A und B im Venn-Diagramm.

4. Sei $C \neq \emptyset$, und sei $c \in C$ beliebig. Angenommen es gibt ein $a \in A$ so dass $a \notin B$. Da $A \times C = B \times C$ ist, gilt $(a', c) \in B \times C$ für alle $a' \in A$. Insbesondere ist $(a, c) \in B \times C$ und somit $a \in B$ nach Definition des direkten Produkts. Das ist absurd. Es folgt $a \in B$ für alle $a \in A$, beziehungsweise $A \subset B$. Da $A \neq B$ existiert also $b \in B$ mit $b \notin A$. Wegen $A \times C = B \times C$ gilt $(b, c) \in A \times C$ und also $b \in A$. Widerspruch. Wir haben gezeigt

$$C \neq \emptyset \wedge A \times C = B \times C \Rightarrow A = B$$

und es folgt die Behauptung.

Literatur

[1] Hermann Schichl and Roland Steinbauer. *Einführung in das mathematische Arbeiten*. Springer Verlag, 2012.