Serie 11:
Lineare Gleichungssysteme, Gauss-Elimination & LR-Zerlegung

1. Gegeben seien die folgenden geordneten Basen $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ und $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ von $\mathbb{Q}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Überprüfen Sie, dass es sich hierbei tatsächlich um Basen handelt und bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $[I_{\mathbb{Q}^4}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$.

2. In dieser Aufgabe beweisen wir die Existenz der LR-Zerlegung einer quadratischen Matrix. Diese für die Numerik wichtige Methode erlaubt das schnelle und numerisch exakte Lösen linearer Gleichungssysteme und geht zurück auf Alan Turing. Der Beweis ist *konstruktiv* in dem Sinne, dass er eine Vorgehensweise liefert, um die LR-Zerlegung einer quadratischen Matrix zu bestimmen. Auf ähnliche Weise erhalten wir eine Vorgehensweise, um die Zeilenstufenform einer Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ zu bestimmen.

Bitte wenden!

a) Betrachten Sie die Menge

$$N := \left\{ U_v := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & I_n \end{pmatrix} \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{K}) \mid v \in \mathbb{K}^n \right\}$$

und zeigen Sie, dass N mit der üblichen Matrixmultiplikation eine Gruppe ist. Bestimmen Sie U_v^{-1} für beliebige $v \in \mathbb{K}^n$.

b) Zeigen Sie, dass für $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ Matrizen $L, R, P \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ existieren, so dass $PA = LR$, wobei L eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen, R eine obere Dreiecksmatrix und P eine Permutationsmatrix, d.h. ein Produkt von Elementarmatrizen vom Typ I sind.

Hinweis: Beweisen Sie die Aussage mittels Induktion über die Anzahl Zeilen von A. Beginnen Sie den Induktionsschritt wie folgt: Wenn $A_{11} \neq 0$, dann finden Sie eine untere Dreiecksmatrix L, so dass

$$LA = \begin{pmatrix} A_{11} & w^T \\ 0_{n-1,1} & B \end{pmatrix}$$

wobei $B \in M_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K})$, $w \in \mathbb{K}^{n-1}$ und $0_{n-1,1} \in \mathbb{K}^{n-1}$ der Nullvektor ist. Nach Induktionsannahme gilt die Aussage für B. Ein Problem taucht jetzt auf, wenn $B_{11} = 0$, dann müssten Sie Zeilen von B vertauschen. Die entsprechende Permutationsmatrix und L kommutieren im Allgemeinen nicht, aber was können Sie darüber aussagen? Konstruieren Sie aus den Beobachtungen den vollständigen Induktionsbeweis.

***c)** Ist die LR-Zerlegung, sprich P, L, R mit $PA = LR$, eindeutig durch A bestimmt? Finden Sie im Beweis von Teilaufgabe (a) den Schritt, wo Sie eine Wahl treffen und formulieren Sie ein hinreichendes Kriterium, damit

1. L und R durch A und P eindeutig bestimmt sind.
2. P und L durch A und R eindeutig bestimmt sind.

Finden Sie ein $n \in \mathbb{N}$, einen Körper $\mathbb{K}$ sowie $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ – die das gefundene hinreichende Kriterium erfüllt – und eine untere Dreiecksmatrix $L \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ so dass

$$PA = LR \quad \text{und} \quad P'A = LR'$$

für verschiedene Permutationsmatrizen $P, P' \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und verschiedene obere Dreiecksmatrizen $R, R' \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

d) Finden Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 10 & 8 \\ 1 & 4 & 6 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

e) Gehen Sie ähnlich vor wie in Teilaufgabe (a) und beweisen Sie die Existenz der Zeilenstufenform einer Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, d.h. zeigen Sie, dass für jede Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ eine endliche Folge elementarer Zeilenumformungen existiert, die A in eine Matrix $A' \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ überführen, so dass

1. Der erste von null verschiedene Eintrag jeder Zeile ist eine Eins und in dieser Spalte sind alle anderen Einträge Nullen.
2. Der erste von null verschiedene Eintrag jeder Zeile steht in einer Spalte rechts des ersten von null verschiedenen Eintrags in der darüberliegenden Zeile.

Bemerkung: Man beachte, dass die obigen beiden Bedingungen implizieren, dass alle Nullzeilen zuunterst stehen.

3. **a)** Finden Sie in $\mathbb{R}^4$ alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ 3x_2 - 4x_3 + \ \ 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + \ \ 9x_2 - 2x_3 - 11x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 12x_2 - 6x_3 - \ \ 8x_4 &= 0 \\ 2x_1 + \ \ 6x_2 + 2x_3 - 14x_4 &= 0 \end{aligned}$$

b) Verwenden Sie Teilaufgabe (a) um alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems zu bestimmen:

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ 3x_2 - 4x_3 + \ \ 3x_4 &= 9 \\ 3x_1 + \ \ 9x_2 - 2x_3 - 11x_4 &= -3 \\ 4x_1 + 12x_2 - 6x_3 - \ \ 8x_4 &= 6 \\ 2x_1 + \ \ 6x_2 + 2x_3 - 14x_4 &= -12 \end{aligned}$$

4. Sei $W \subset \mathbb{R}^4$ der Unterraum

$$W := \operatorname{span}\left\{ v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Finden Sie ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsraum W ist.

b) Bestimmen Sie alle Basen von W enthalten in $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Bitte wenden!

5. Für reelle Zahlen a, b führen Sie die folgende reelle 4×4 Matrix in Zeilenstufenform über:

$$B = \begin{pmatrix} a & b & 0 & b \\ b & a & b & 0 \\ 0 & b & a & b \\ b & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

6. Online Abgabe Serie 11:

1. Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

in $M_{3\times 3}(\mathbb{Q})$. Dann existiert $U \in M_{3\times 3}(\mathbb{Q})$, so dass $UA = B$ und

(a) U eine obere Dreiecksmatrix ist.

(b) U eine untere Dreiecksmatrix ist.

(c) U eine Permutationsmatrix ist.

(d) U nicht-invertierbar ist.

2. Für welche Werte $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= b_1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= b_2 \\ 4x_2 - 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

lösbar?

(a) Für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$

(b) Für keine $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$

(c) Für alle b_1, b_2, b_3 mit $b_3 + b_2 - b_1 = 0$.

(d) Für alle b_1, b_2, b_3 mit $b_3 + b_2 - b_1 \neq 0$.

(e) Das lässt sich nicht entscheiden.

Bitte wenden!

3. Das durch die erweiterte Matrix definierte lineare Gleichungssystem

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

hat

(a) genau den Lösungsvektor $\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(b) genau den Lösungsvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$.

(c) genau den Lösungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(d) keine Lösung.

(e) Keine der anderen genannten Möglichkeiten ist korrekt.

4. Für die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und den reellen Vektor $b = (1, 2, 0)^T$ hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$

(a) keine Lösung

(b) eine eindeutige Lösung

(c) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter

(d) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern

Siehe nächstes Blatt!

5. Für die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hat das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$

(a) keine Lösung

(b) eine eindeutige Lösung

(c) eine Lösungsmenge mit 1 freien Parameter

(d) eine Lösungsmenge mit 2 freien Parametern

6. Seien A, B $m \times n$-Matrizen. Dann ist $\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = Bx\}$ ein Unterraum von $\mathbb{K}^n$.

(a) Falsch.

(b) Richtig.

7. Die Lösungsmenge eines Systems von m linearen Gleichungen in n Unbekannten ist ein Unterraum von K^n.

(a) richtig

(b) falsch

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Freitag, den 9. Dezember 12:00 Uhr mittags im Fach Ihrer Assistentin bzw. Ihres Assistenten im HG J 68.