# Serie 3: Ringe, Körper, Vektorräume

**1.** Im Folgenden sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}_n$ bezeichne die Menge der Äquivalenzklassen von $\mathbb{Z}$ bezüglich der Relation:

$$k \sim_n l \Leftrightarrow n \mid k - l \quad \forall k, l \in \mathbb{Z}$$

Wir schreiben $k \equiv l \mod n$, wenn $k \sim_n l$, und bezeichnen mit $[k]$ die Äquivalenzklasse von $k$ bezüglich $n$.

**a)** Definieren Sie eine Addition "+" und eine Multiplikation "·" auf $\mathbb{Z}_n$ durch

$$[k] + [l] := [k + l] \text{ und } [k] \cdot [l] := [kl] \quad \forall [k], [l] \in \mathbb{Z}_n$$

Zeigen Sie, dass Addition und Multiplikation wohldefiniert sind und dass $\mathbb{Z}_n$ mit diesen Verknüpfungen ein Ring ist.

**b)** Zeigen Sie mithilfe von Division mit Rest und Induktion, dass für ganze Zahlen $a, b, e, f \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft $m \mid e \wedge m \mid f \implies m = \pm 1$ gilt:

$$ae = bf \implies e \mid b$$

**c)** (*) Gegeben $k, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, definiere $(k, l) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ durch:

1. $(k, l) \mid k$ und $(k, l) \mid l$
2. $\forall a \in \mathbb{Z} : (a \mid k \wedge a \mid l) \Rightarrow a \mid (k, l)$

Zeigen Sie, dass für alle $k, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ein Element $(k, l) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit dieser Eigenschaft existiert und dass es bis auf Vorzeichen eindeutig ist, d.h. wenn $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ein weiteres Element mit denselben Eigenschaften ist, dann gilt $a = \pm(k, l)$. Das (bis auf Vorzeichen eindeutige) Element $(k, l)$ heisst "grösster gemeinsamer Teiler" von $k$ und $l$, kurz $\mathrm{ggT}(k, l)$.

**d)** Zeigen Sie das Lemma von Bézout: Seien $k, l, m \in \mathbb{Z}$ mit $k, l \neq 0$, dann sind folgende äquivalent:

1. $\exists s, t \in \mathbb{Z} : m = sk + tl$
2. $(k, l) \mid m$

**e)** Folgern Sie aus Teilaufgabe d), dass

$$\mathbb{Z}_n \text{ ist ein Körper} \Leftrightarrow n \text{ ist prim}$$

**Bitte wenden!**

**2.** **a)** Sei $(R, 0, +, \cdot)$ ein beliebiger, kommutativer Ring. Beweisen Sie, dass für alle $x, y \in R$ und für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m, n \geq 0$ gelten:

$$(xy)^m = x^m y^m \text{ und } (x^m)^n = x^{mn}$$

**b)** Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$$

mit der Addition und der Multiplikation der reellen Zahlen ein Körper ist.

**3.** Sei $P(\mathbb{R})$ der Ring der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$.

**a)** Seien $p, q \in P(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $p+q$ und $p \cdot q$ Polynome sind und bestimmen Sie Koeffizienten von $p + q$ und $p \cdot q$.

*Bemerkung:* Sie werden im Verlaufe dieses Semesters lernen, dass *die* Koeffizienten eines Polynoms eindeutig sind. Sie können dies im Folgenden verwenden.

**b)** Sei $p$ ein Polynom mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, d.h.

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \forall x$$

Der *Grad* von $p$ ist definiert als

$$\deg(p) := \begin{cases} -\infty & \text{falls } a_k = 0 \forall 0 \leq k \leq n \\ \max\{k \mid 0 \leq k \leq n \wedge a_k \neq 0\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Seien $p, q \in P(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie $\deg(p \cdot q)$.

**c)** Bestimmen Sie die Elemente $0_R, 1_R \in P(\mathbb{R})$ definiert durch

$$0_R + p = p \text{ bzw. } 1_R \cdot p = p \quad \forall p \in P(\mathbb{R})$$

Sei weiter $p \in P(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass das Element $p' \in P(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft $p + p' = 0_R$ eindeutig bestimmt ist. Wir schreiben $-p$ für dieses durch $p$ vollständig bestimmte Element.

**d)** Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln in $P(\mathbb{R})$:

1. $\forall p \in P(\mathbb{R}) : 0_R \cdot p = p \cdot 0_R = 0_R$
2. $\forall p, q \in P(\mathbb{R}) : (-p) \cdot q = q \cdot (-p) = -(p \cdot q)$
3. $\forall p, q \in P(\mathbb{R}) : p \cdot q = (-p) \cdot (-q)$
4. $\forall p \in P(\mathbb{R}) : (-1_R) \cdot p = p \cdot (-1_R) = -p$

**Siehe nächstes Blatt!**

**e)** Definieren Sie eine skalare Multiplikation $\mathbb{R} \times P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ durch punktweise Multiplikation, i.e. für $c \in \mathbb{R}$ und $p \in P(\mathbb{R})$ sei $c \cdot p$ definiert als die Abbildung $f$ mit der Eigenschaft $f(x) = cp(x)$ für alle $x$. Zeigen Sie, dass diese skalare Multiplikation wohldefiniert und dass $P(\mathbb{R})$ mit dieser skalaren Multiplikation ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.

**f)** Sei $d \in \mathbb{Z}$ und seien

$$P_d(\mathbb{R}) := \{p \in P(\mathbb{R}) \mid \deg(p) \leq d\}$$
$$P_{=d}(\mathbb{R}) := \{p \in P(\mathbb{R}) \mid \deg(p) = d\}$$

Sind dies, versehen mit der von $P(\mathbb{R})$ induzierten Addition und skalaren Multiplikation, Vektorräume über $\mathbb{R}$?

**4.** Sei $V$ ein Vektorraum über einem Körper $K$.

**a)** Beweisen Sie, dass das Element $0_V \in V$ mit der Eigenschaft

$$0_V + v = v \quad \forall v \in V$$

eindeutig ist.

**b)** Sei $w \in V$. Beweisen Sie, dass das Element $v \in V$ mit der Eigenschaft

$$w + v = 0_V$$

eindeutig ist. *Bemerkung:* Man schreibt $-w$ für dieses durch $w$ eindeutig bestimmte $v \in V$.

**5. Online-Abgabe**

**Bitte wenden!**

**1.** Sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$, seien $v, w \in V$ und $a, b \in K \setminus \{0\}$. Dann gilt:

(a) $(a+b) \cdot (v+w) = av + bw$

(b) $(a+b)v + (a+b)w = a(v+w) + b(v+w)$

(c) $a(a^{-1}v + b^{-1}w) = v + ab^{-1}w$

(d) $av + bw = bw + av$

(e) $av + bw = aw + bv$

**2.** In jedem Vektorraum $V$ gilt $av = bv \implies a = b$ für $a, b \in K, v \in V$

(a) richtig

(b) falsch

**3.** In jedem Vektorraum $V$ gilt $av = aw \implies v = w$ für $a \in K, v, w \in V$

(a) richtig

(b) falsch

**4.** Seien $f, g \in P(\mathbb{R})$ mit $\deg(f) = \deg(g) = n$, dann ist $\deg(f+g) = n$.

(a) richtig

(b) falsch

**Siehe nächstes Blatt!**

**5.** Versehen Sie $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit folgender Addition "+" und skalarer Multiplikation "·":

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) + (b_1, b_2) &:= (a_1 + b_1, a_2 b_2)\\ c \cdot (a_1, a_2) &:= (c a_1, a_2)\end{aligned}$$

für alle $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und für alle $c \in \mathbb{R}$. Mit diesen Verknüpfungen ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

(a) Wahr

(b) Falsch

**6.** Sei $K$ ein Körper und versehen Sie $K \times K$ mit komponentenweiser Addition und einer skalaren Multiplikation "·":

$$c \cdot (a_1, a_2) := (a_1, 0)$$

für alle $(a_1, a_2) \in K \times K$ und für alle $c \in K$. Mit diesen Verknüpfungen ist $K \times K$ ein Vektorraum über $K$.

(a) Wahr

(b) Falsch

**7.** Sei $K$ ein beliebiger Körper. Definiere auf $K \times K$ eine Addition durch komponentenweise Addition und eine skalare Multiplikation

$$\forall (a_1, a_2) \in K \times K \forall c \in K : c \cdot (a_1, a_2) := \begin{cases} (0, 0) & \text{falls } c = 0 \\ (c a_1, c^{-1} a_2) & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit diesen Verknüpfungen ist $K \times K$ ein Vektorraum über $K$.

(a) Wahr

(b) Falsch

**Abgabe der schriftlichen Aufgaben:** Vor Freitag, den 14. Oktober 12:00 Uhr mittags im Fach Ihrer Assistentin bzw. Ihres Assistenten im HG J 68.