# Serie 5: Linearkombinationen, lineare (Un-)Abhängigkeit, Basis & Dimension

1. Wir schreiben

$$v_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, v_4 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, v_5 := \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

**"$\mathbb{K} = \mathbb{Q}$":** Bemerke, dass $v_1 = v_3 + v_4$. Folglich ist $\langle S\rangle = \langle v_2, v_3, v_4, v_5\rangle$. Wir zeigen, dass $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ linear unabhängig ist. Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$ mit $0_{\mathbb{Q}^5} = \alpha v_2 + \beta v_3 + \gamma v_4 + \delta v_5$, also

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \gamma & + & \delta & = & 0\\ & & \beta & & & & & = & 0\\ \alpha & + & & & & & \delta & = & 0\\ \alpha & + & & & \gamma & & & = & 0\\ & & & & \gamma & + & \delta & = & 0 \end{array}$$

Also gelten $\gamma = -\delta$, $\beta = 0$, $\alpha = -\delta$ sowie $\gamma = -\alpha$. Einsetzen der dritten in die vierte Gleichung impliziert $\gamma = \delta$ und dies zusammen mit der ersten liefert $\gamma = 0$ und also $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Also ist $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ eine Basis von $\langle S\rangle$ und folglich minimal.

**"$\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$":** Keine Musterlösung.

**Bitte wenden!**

2. a) Angenommen $A_1, A_2$ sind linear abhängig. Dann existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ nicht alle 0, so dass

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} &= \alpha\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\alpha & 2\alpha+\beta & 3\alpha\\ 0 & 0 & \alpha+\beta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Also gilt $\alpha = \beta = 0$ und folglich sind $A_1, A_2$ linear unabhängig.

b) Aus der Rechnung in Teil 2.a folgt, dass $\langle A_1, A_2\rangle \subset M$. Wir müssen also nur zeigen, dass $M \subset \langle A_1, A_2\rangle$, d.h. dass jede Matrix $B \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ der Form $\left(\begin{smallmatrix}a&b&c\\0&0&f\end{smallmatrix}\right)$ mit $b - a = f$ und $3a = c$ in $\langle A_1, A_2\rangle$ enthalten ist. Wir zeigen $B = aA_1 + (f-a)A_2$:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a&b&c\\0&0&f\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}a & a+f & 3a\\ 0 & 0 & f\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}a&2a&3a\\0&0&a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & f-a & 0\\ 0 & 0 & f-a\end{pmatrix}\\ &= aA_1 + (f-a)A_2\end{aligned}$$

c) Keine Musterlösung.

3. a) Keine Musterlösung.

b) Wir bemerken als erstes, dass $-2p_3(x) + 3p_4(x) = 1$. Des weiteren gilt $3p_3(x) - 4p_4(x) = x$. Es folgt also

$$x^2 = p_2(x) + 2(3p_3(x) - 4p_4(x)) + 4(-2p_3(x) + 3p_4(x))$$

und schliesslich

$$x^3 = p_3(x) - p_2(x) - 2(3p_3(x) - 4p_4(x)) - 4(-2p_3(x) + 3p_4(x))$$

Es folgt $\{1, x, x^2, x^3\} \subset \langle p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\rangle$, also $P_3(\mathbb{R}) = \langle 1, x, x^2, x^3\rangle \subset \langle p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\rangle$. Da $\deg p \leq 3$ für alle $p \in \langle p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\rangle$ gilt $\langle p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\rangle = P_3(\mathbb{R})$.

4. Wir schreiben 2 für das Element $2 \cdot 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ und wir schreiben $\frac{1}{2}$ für $2^{-1} \in \mathbb{K}$.[1]

a) **"$\Rightarrow$":** Angenommen $\{u, v\}$ sind linear unabhängig und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ mit $0_V = \alpha(u+v) + \beta(u-v)$, dann gilt

$$0_V = \alpha(u+v) + \beta(u-v) = (\alpha+\beta)u + (\alpha-\beta)v$$

[1] Man beachte also, dass $2 \in \mathbb{K}$ und somit nicht in $\mathbb{Z}$. Wir verwenden also dasselbe Symbol für zwei eigentlich verschiedene Elemente.

**Siehe nächstes Blatt!**

Also $0 = \alpha + \beta = \alpha - \beta$, also

$$1 \cdot \beta = \beta = -\beta = (-1) \cdot \beta$$

und wenn $\beta \neq 0$, dann impliziert die Kürzungsregel, dass $1 = -1$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $\beta = 0$ und folglich auch $\alpha = 0$. Dies zeigt, dass $\{u + v, u - v\}$ linear unabhängig ist, wie gewünscht.

**"$\Leftarrow$":** Angenommen $\{u + v, u - v\}$ sind linear unabhängig aund $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ so dass

$$0_V = \alpha u + \beta v$$

Setze

$$\alpha' := \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$
$$\beta' := \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha'(u + v) + \beta'(u - v) =& (\alpha' + \beta')u + (\alpha' - \beta')v \\ =& \frac{1}{2}2\alpha u + \frac{1}{2}2\beta v = \alpha u + \beta v \end{aligned}$$

Also ist $0 = \alpha' = \beta'$. Daraus folgt $0 = \alpha' + \beta' = \alpha$ und $0 = \alpha' - \beta' = \beta$, und folglich ist $\{u, v\}$ linear unabhängig.

*Bemerkung:* In $\mathbb{F}_2$ is $2 = 0$, somit ist $2$ nicht invertierbar und wir können $\alpha'$ nicht wie oben definieren. Man sieht aber sofort, dass die Aussage falsch ist, denn in $\mathbb{F}_2$ ist $1 = -1$ und folglich $u - v = u + v$, also ist $\{u + v, u - v\}$ sicher nicht linear unabhängig.

b) **"$\Rightarrow$"** Seien $\{u, v, w\}$ linear unabhängig und seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ so dass

$$\begin{aligned} 0_V =& \alpha(u + v) + \beta(v + w) + \gamma(w + u) \\ =& (\alpha + \gamma)u + (\alpha + \beta)v + (\beta + \gamma)w \end{aligned}$$

Nach Annahme sind also $0 = \alpha + \gamma = \alpha + \beta = \beta + \gamma$. Es gilt also $\gamma = -\alpha =$, $\beta = -\alpha$ und $\beta + \gamma = -2\alpha$. Folglich ist $\alpha = 0$ und also $0 = \alpha = -\beta = -\gamma = 0$.

**"$\Leftarrow$":** Seien $\{u + v, v + w, w + u\}$ linear unabhängig und $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ mit

$$0_V = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

Dann gilt auch

$$0_V = \left(\frac{1}{2}\alpha\right)u + \left(\frac{1}{2}\beta\right)v + \left(\frac{1}{2}\gamma\right)w$$

**Bitte wenden!**

Definiere

$$\begin{aligned}\alpha' =& \alpha + \beta - \gamma \\ \beta' =& -\alpha + \beta + \gamma \\ \gamma' =& \alpha - \beta + \gamma\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\alpha'(u+v) + \beta'(v+w) + \gamma'(w+u) = 2(\alpha u) + 2(\beta v) + 2(\gamma w)$$

Also ist $0 = \alpha' = \beta' = \gamma'$. Es folgen

$$\begin{aligned}2\alpha =& \alpha' + \gamma' = 0 \\ 2\beta =& \alpha' + \beta' = 0 \\ 2\gamma =& \beta' + \gamma' = 0\end{aligned}$$

und also $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Dies zeigt, dass $\{u, v, w\}$ linear unabhängig ist.

*Bemerkung:* Wo wurde verwendet, dass $u, v, w$ paarweise verschieden sind?

5. a) Keine Musterlösung.

   b) Seien $v_1, \ldots, v_n$ die Spalten von $A$, und seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Sei $v := \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$.

   Eine Induktion zeigt, dass für den $k$-ten Eintrag $v^{(k)}$ von $v$ gilt

$$v^{(k)} = \sum_{i=k}^{n} \alpha_i A_{ki}$$

   Falls $n = 1$, dann ist nichts zu zeigen. Sei die Aussage also wahr für jede obere Dreiecksmatrix $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Sei $N := n + 1$ und $A \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ eine obere Dreiecksmatrix. Dann existiert ein $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, ein Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ so dass

$$A = \begin{pmatrix} B & u \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

   Seien $w_1, \ldots, w_n$ die Spaltenvektoren von $B$, $v_1, \ldots, v_N$ die Spaltenvektoren von $A$, und sei $v := \sum_{k=1}^{N} \alpha_k v_k$. Sei $1 \le k \le n$, dann gilt für den $k$-ten Eintrag $v^{(k)}$ von $v$

$$\begin{aligned}v^{(k)} &= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i v_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i^{(k)} + \alpha_N u^{(k)} = \sum_{i=k}^{n} \alpha_i B_{ki} + \alpha_N u^{(k)} \\ &= \sum_{i=k}^{n} \alpha_i A_{ki} + \alpha_N A_{kN} = \sum_{i=k}^{N} \alpha_i A_{ki}\end{aligned}$$

**Siehe nächstes Blatt!**

Es gilt $v^{(N)} = \alpha_N A_{NN} = \sum_{k=N}^{N} \alpha_k A_{Nk}$ und folglich ist die Formel bewiesen.

Nehmen wir also an, dass $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine obere Dreiecksmatrix ist, mit $A_{ii} \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq n$. Seien $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ die Spalten von $A$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ so dass $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$, also $0 = \sum_{i=k}^{n} \alpha_i A_{ik}$ für alle $1 \leq k \leq n$. Insbesondere gilt $0 = \alpha_n A_{nn}$, und aus $A_{nn} \neq 0$ folgt $\alpha_n = 0$. Sei $1 \leq k < n$ und seien $\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0$. Dann gilt nach Annahme $0 = \sum_{i=k}^{n} \alpha_i A_{ki} = \alpha_k A_{kk}$ und folglich $\alpha_k = 0$. Es folgt also $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ und folglich sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

c) Keine Musterlösung.

d) Angenommen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha e^{sx} + \beta e^{rx} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist $\alpha e^{(s-r)x} = -\beta$. Also ist $e^{(s-r)x}$ konstant, und folglich $s = r$. Das ist ein Widerspruch.