Serie 5:
Linearkombinationen, lineare (Un-)Abhängigkeit, Basis & Dimension

1. Für die Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ finde man ein minimales Erzeugendensystem $S' \subset S$ von $\langle S \rangle$, wobei

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Seien $A_1, A_2 \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Zeigen Sie, dass $\{A_1, A_2\}$ linear unabhängig ist.

   b) Sei

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \mid d = e = 0, b - a = f, 3a = c \right\}$$

   Beweisen Sie, dass $\langle A_1, A_2 \rangle = M$.

   c) Finden Sie $A_3 \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ so dass $\{A_1, A_2, A_3\}$ linear unabhängig ist. Ist $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$?

Bitte wenden!

3. Gegeben sind die vier Polynome

$$\begin{aligned} p_1(x) =& x^3 + x^2 \\ p_2(x) =& x^2 - 2x - 4 \\ p_3(x) =& 3x + 4 \\ p_4(x) =& 2x + 3 \end{aligned}$$

   a) Man schreibe das Polynom $2x^3 + 3x^2 - 1$ als Linearkombination der Polynome p_1, p_2, p_3, p_4.

   b) Berechnen Sie das Erzeugnis $\langle p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle$.

4. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper in dem $1 \neq -1$, und sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

   a) Seien $u, v \in V$ und $u \neq v$. Dann ist $\{u, v\}$ genau dann linear unabhängig, wenn $\{u + v, u - v\}$ linear unabhängig ist.

   b) Seien $u, v, w \in V$ paarweise verschieden. Dann ist $\{u, v, w\}$ genau dann linear unabhängig, wenn $\{u + v, v + w, u + w\}$ linear unabhängig ist.

5. Sind die folgenden Mengen linear unabhängig über $\mathbb{R}$?

   a) $\{(1, 0, 0), (0, 2, t), (2, 4, t^2)\}$ für ein $t \in \mathbb{R}$.

   b) Die Menge der Spalten einer oberen Dreiecksmatrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $A_{ii} \neq 0$.

   c) $\{\sin(x), \cos(x)\} \subset \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

   d) $\{e^{rx}, e^{sx}\} \subset \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ für fixe $s, r \in \mathbb{R}$.

6. **Online Abgabe Serie 5:**

1. (Aufgabe aus der Zwischenprüfung 2014) Welche der folgenden Mengen von Vektoren im $\mathbb{R}^4$ sind linear unabhängig?

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(e) Keine der Mengen ist linear unabhängig.

2. Jede Teilmenge $S \subset V$ eines Vektorraums V über $\mathbb{K}$, die den Nullvektor enthält, ist linear abhängig

(a) richtig

(b) falsch

Bitte wenden!

3. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Sei $v \in V$, dann ist die Menge $W := \{w \in V \mid \exists \lambda \in \mathbb{K} : w = \lambda \cdot v\}$ ein Unterraum von V.

(b) Eine Teilmenge $W \subset V$ ist genau dann ein Unterraum, wenn $\langle W \rangle = W$.

(c) Seien $S_1, S_2 \subset V$ Teilmengen. Dann gilt $\langle S_1 \cup S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$.

(d) Seien $S_1, S_2 \subset V$ Teilmengen. Dann gilt $\langle S_1 \cap S_2 \rangle \subset \langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle$.

(e) Keine der Aussagen ist richtig.

4. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $\dim V = n < \infty$. Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Es existieren eindeutige Unterräume $W_1, W_2 \subset V$ mit $\dim W_1 = 0$ und $\dim W_2 = n$.

(a) Wahr

(b) Falsch

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Freitag, den 28. Oktober 12:00 Uhr mittags im Fach Ihrer Assistentin bzw. Ihres Assistenten im HG J 68.