Serie 6:
Basis, Dimension und Quotientenräume

1. a) **"$\Rightarrow$":** Angenommen $ad - bc = 0$ mit $d \neq 0$ oder $b \neq 0$, dann gilt

$$d\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc \\ bd - bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $\mathcal{B}$ keine Basis.
Falls $b = d = 0$, dann ist $\mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix} a \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} c \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$ sicher nicht linear unabhängig. Wir haben also gezeigt, dass für jede Basis $\mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)\}$ von $\mathbb{C}^2$ gilt $ad - bc \neq 0$.

"$\Leftarrow$": Angenommen $D := ad - bc \neq 0$ und $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2$. Definiere

$$\alpha := \frac{dx - cy}{D} \quad \beta := \frac{-bx + ay}{D}$$

dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} &= \frac{1}{D}\begin{pmatrix} (dx - cy)a + (-bx + ay)c \\ (dx - cy)b + (-bx + ay)d \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{D}\begin{pmatrix} (ad - bc)x \\ (ad - bc)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{C}^2$ und da $\dim \mathbb{C} = 2$ (als Vektorraum über $\mathbb{C}$), folgt dass $\mathcal{B}$ eine Basis ist.

b) Die Mengen $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ und $\{\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)\}$ sind disjunkt und gemäss Teil (a) Basen von $\mathbb{C}^2$.

2. a) Da W ein Vektorraum ist, gilt $w - w = 0 \in W$ für alle $w \in W$, also ist R reflexiv.

   Falls $v_1 - v_2 \in W$, dann ist auch $-(v_1 - v_2) = v_2 - v_1 \in W$ und R ist symmetrisch. Da W unter Addition abgeschlossen ist, gilt für $v_1 - v_2 \in W$ und $v_2 - v_3 \in W$ auch

$$v_1 - v_3 = (v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) \in W$$

   Also ist R transitiv und somit eine Äquivalenzrelation.

   b) Angenommen $v_1 \sim v_2$ und $v_1' \sim v_2'$, dann existieren $w, w' \in W$ so dass $v_1 = v_2 + w$ und $v_1' = v_2' + w'$. Also ist

$$(v_2 + v_2') - (v_1 + v_1') = w + w' \in W$$

   Es folgt also $[v_2 + v_2'] = [v_1 + v_1']$ und somit hängt die Addition nicht von der Wahl der Repräsentanten ab und ist wohldefiniert.

   Sei $\lambda \in \mathbb{K}$, dann ist

$$\lambda v_2 - \lambda v_1 = \lambda w \in W$$

   Es folgt also $[\lambda v_2] = [\lambda v_1]$ und somit hängt die skalare Multiplikation nicht von der Wahl des Repräsentanten ab und ist wohldefiniert.

   Die Vektorraumaxiome folgen sofort aus den Vektorraumaxiomen für V. Seien $u, v, w \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, dann

   V1. $[u] + [v] = [u + v] = [v + u] = [v] + [u]$

   V2. $([u] + [v]) + [w] = [u + v] + [w] = [(u + v) + w] = [u + (v + w)] = [u] + [v + w] = [u] + ([v] + [w])$

   V3. $[0_V] + [v] = [0_V + v] = [v]$

   V4. $[-v] + [v] = [-v + v] = [0_V]$

   V5. $1 \cdot [v] = [1 \cdot v] = [v]$

   V6. $(\lambda\mu) \cdot [v] = [(\lambda\mu) \cdot v] = [\lambda(\mu \cdot v)] = \lambda[\mu \cdot v] = \lambda(\mu \cdot [v])$

   V7. $\lambda \cdot ([u] + [v]) = \lambda \cdot [u + v] = [\lambda \cdot (u + v)] = [\lambda \cdot u + \lambda \cdot v] = [\lambda \cdot u] + [\lambda \cdot v] = \lambda \cdot [u] + \lambda \cdot [v]$

   V8. $(\lambda + \mu) \cdot [v] = [(\lambda + \mu) \cdot v] = [\lambda \cdot v + \mu \cdot v] = [\lambda \cdot v] + [\mu \cdot v] = \lambda \cdot [v] + \mu \cdot [v]$

   Also ist ${}^{V}\!/_{\sim}$ mit diesen Verknüpfungen ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

   c) Wir definieren $\Phi(v + W) := [v]$. Wir müssen zuerst zeigen, dass die Abbildung wohldefiniert ist. Seien also $v_1, v_2 \in V$, so dass $v_1 + W = v_2 + W$, dann existiert für jedes $w_1 \in W$ ein $w_2 \in W$, so dass $v_1 + w_1 = v_2 + w_2$. Für $w_1 = 0$ folgt insbesondere, dass $v_1 = v_2 + w$ für ein $w \in W$, also $v_1 - v_2 \in W$ und also $[v_1] = [v_2]$. Somit ist das Bild von $v + W$ unter Φ nicht vom Repräsentanten von $v + W$ abhängig und Φ also wohldefiniert.

Siehe nächstes Blatt!

Für die geforderte *Linearität* berechnen wir für $u, v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}\Phi((u+W)+(v+W)) =& \Phi((u+v)+W) = [u+v] = [u]+[v] \\ =& \Phi(u+W)+\Phi(v+W) \\ \Phi(\lambda\cdot(u+W)) =& \Phi(\lambda\cdot u+W) = [\lambda\cdot u] \\ =& \lambda\cdot[u] = \lambda\cdot\Phi(u+W)\end{aligned}$$

Die Abbildung ist sicherlich surjektiv, da jedes Element in $x \in {}^{V}\!/_{\sim}$ per Definition von der Form $x = [v]$ für ein $v \in V$, also auch $x = \Phi(v+W)$. Für die Injektivität nehmen wir an, dass $u, v \in V$ mit $\Phi(u+W) = \Phi(v+W)$, also $[u] = [v]$. Dann gilt $u - v \in W$ und folglich existiert $w \in W$ so dass $u = v + w$. Wir müssen nun daraus folgern, dass $u + W = v + W$. Sei $w' \in W$, dann ist $u + w' = (v+w)+w' = v+(w+w') \in v+W$ und also $u+W \subset v+W$, da $w' \in W$ beliebig war. Andererseits gilt für beliebige $w' \in W$ auch $v+w' = (u-w)+w' = u+(-w+w') \in u+W$ und also $v+W \subset u+W$, und folglich $u+W = v+W$. Also ist Φ bijektiv.

3. Wähle eine Basis $x_1, \ldots, x_m$ von ${}^{V}\!/_{W}$. Per definitionem existieren $u_1, \ldots, u_m \in V$, so dass $x_i = u_i + W$. Sei $U := \langle u_1, \ldots, u_m\rangle$. Wir behaupten, dass $V = W \oplus U$. Wir zeigen zuerst, dass $U \cap W = \{0_V\}$. Angenommen $v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m \in U \cap W$, dann ist wegen $v \in W$

$$\begin{aligned}0_{V/W} =& v+W = (\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m) + W \\ =& \lambda_1(u_1+W) + \cdots + \lambda_m(u_m+W) \\ =& \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m\end{aligned}$$

und folglich $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$, also auch $U \cap W = \{0_V\}$. Wegen $\dim U = m = \dim {}^{V}\!/_{W}$ folgt

$$\begin{aligned}\dim(U+W) =& \dim U + \dim W - \dim(U\cap W) \\ =& (\dim V - \dim W) + \dim W + 0 = \dim V\end{aligned}$$

und folglich ist $U + W = V$. Also insbesondere $V = U \oplus W$.

4. Wir wissen aus der Vorlesung, dass $V = W_1 \oplus W_2$, d.h. für alle $A \in V$ existieren eindeutige $B \in W_1, C \in W_2$, so dass $A = B + C$. Seien nämlich $A \in V$, $B, B' \in W_1$ und $C, C' \in W_2$, so dass $A = B+C = B'+C'$, dann ist $B - B' = C' - C \in W_1 \cap W_2$ und folglich $B = B'$ und $C = C'$.

   Gegeben $A \in V$, dann schreiben wir $A_{sym} \in W_1$ und $A_{skew} \in W_2$ für die eindeutig bestimmten Elemente mit

$$A = A_{sym} + A_{skew}$$

   Definiere

$$\Phi : {}^{V}\!/_{W_1} \to W_2, A + W_1 \mapsto A_{skew}$$

Bitte wenden!

Wir müssen zeigen, dass die Abbildung wohldefiniert ist. Angenommen $A, A' \in V$ mit $A + W_1 = A' + W_1$. Da $0 \in W_1$, existiert ein $B \in W_1$, so dass $A' = A + B$, folglich gilt

$$\begin{aligned} A' =& A + B = (A_{sym} + A_{skew}) + B \\ =& \underbrace{(A_{sym} + B)}_{\in W_1} + A_{skew} \end{aligned}$$

Es gilt also $A'_{skew} = A_{skew}$ und somit ist Φ wohldefiniert. Wir überprüfen die Linearität. Seien $A, B \in V$, dann ist

$$\begin{aligned} A + B =& (A_{sym} + A_{skew}) + (B_{sym} + B_{skew}) \\ =& \underbrace{(A_{sym} + B_{sym})}_{\in W_1} + \underbrace{(A_{skew} + B_{skew})}_{\in W_2} \end{aligned}$$

Also ist $(A + B)_{skew} = A_{skew} + B_{skew}$ und folglich

$$\begin{aligned} \Phi((A + W_1) + (B + W_1)) =& \Phi((A + B) + W_1) = (A + B)_{skew} \\ =& A_{skew} + B_{skew} \\ =& \Phi(A + W_1) + \Phi(B + W_1) \end{aligned}$$

Ähnlich gilt für $\lambda \in \mathbb{R}$, dass

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot (A_{sym} + A_{skew}) = \underbrace{\lambda \cdot A_{sym}}_{\in W_1} + \underbrace{\lambda \cdot A_{skew}}_{\in W_2}$$

Also ist $(\lambda \cdot A)_{skew} = \lambda \cdot A_{skew}$. Es folgt

$$\Phi(\lambda \cdot (A + W_1)) = \Phi(\lambda \cdot A + W_1) = \lambda \cdot A_{skew} = \lambda \cdot \Phi(A)$$

Es bleibt zu zeigen, dass Φ eine Bijektion ist. Φ ist sicherlich surjektiv, da für jedes $A \in W_2$ gilt $\Phi(A + W_1) = A$. Seien also $A, B \in V$ mit $\Phi(A + W_1) = \Phi(B + W_1)$, dann gilt

$$\begin{aligned} 0 =& \Phi(A + W_1) - \Phi(B + W_1) \\ =& \Phi((A + W_1) - (B + W_1)) \\ =& \Phi((A - B) + W_1) \end{aligned}$$

Also ist $0 = (A - B)_{skew} = A_{skew} - B_{skew}$ und somit folgt

$$A = A_{sym} + A_{skew} = A_{sym} + B_{skew} = \underbrace{(A_{sym} - B_{sym})}_{\in W_1} + B$$

Also ist $A + W_1 = B + W_2$ und somit ist Φ injektiv.