Serie 7:
Lineare Abbildungen: Kern, Bild, Rang und Darstellungen durch Matrizen

1. **a)** Seien $v_1, v_2 \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$, dann sind

$$\begin{aligned} I_V(v_1+v_2) =& v_1+v_2 = I_V(v_1)+I_V(v_2) \\ I_V(\lambda v_1) =& \lambda v_1 = \lambda I_V(v_1) \end{aligned}$$

Also ist I_V linear.

b) Seien $v_1, v_2 \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$, dann sind

$$\begin{aligned} \mathbf{0}(v_1+v_2) =& 0 = 0+0 = \mathbf{0}(v_1)+\mathbf{0}(v_2) \\ \mathbf{0}(\lambda v_1) =& 0 = \lambda 0 = \lambda \mathbf{0}(v_1) \end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{0}$ linear.

c) Gegeben $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = (ax + by, cx + dy) \quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

zeigen wir die Linearität von f. Man bemerke, dass es sich bei r_φ um den Spezialfall $a = d = \cos\varphi$ und $-b = c = \sin\varphi$ handelt und dass aus der Linearität von f die Linearität von r_φ folgt. Seien $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(v_1+v_2) =& f(x_1+x_2, y_1+y_2) \\ =& \big(a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2), c(x_1+x_2)+d(y_1+y_2)\big) \\ =& \big((ax_1+by_1)+(ax_2+by_2), (cx_1+dy_1)+(cx_2+dy_2)\big) \\ =& (ax_1+by_1, cx_1+dy_1)+(ax_2+by_2, cx_2+dy_2) = f(v_1)+f(w) \end{aligned}$$

Bitte wenden!

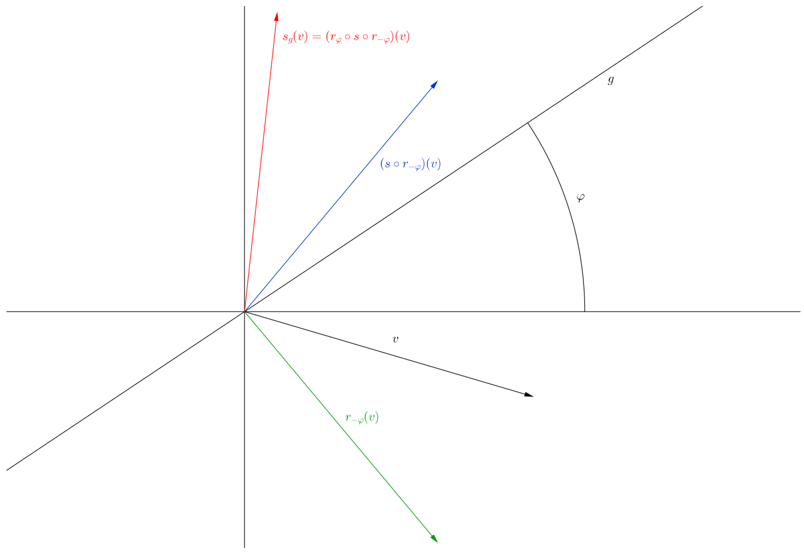

Abbildung 1: Die Spiegelung des Vektors v an der Geraden g durch den Ursprung.

$$\begin{aligned}
f(\lambda v_1) =& f(\lambda x_1, \lambda y_1) = \big(a(\lambda x_1) + b(\lambda y_1), c(\lambda x_1) + d(\lambda y_1)\big) \\
=& \big(\lambda(ax_1 + by_1), \lambda(cx_1 + dy_1)\big) \\
=& \lambda(ax_1 + by_1, cx_1 + dy_1) = \lambda f(x_1, y_1) = \lambda f(v_1)
\end{aligned}$$

Die Abbildung rotiert einen Vektor in $\mathbb{R}^2$ um den Winkel φ um den Ursprung.

d) Keine Musterlösung

e) Sei g eine Gerade in $\mathbb{R}^2$, sei φ der Winkel zwischen der Geraden und dem positiven Teil der x-Achse. Dann ist die Reflexion s_g an der Geraden g gleich der Komposition von Rotation um Winkel φ im Uhrzeigersinn, Reflexion s an der x-Achse und Rotation um Winkel φ im Gegenuhrzeigersinn, d.h. $s_g = r_\varphi \circ s \circ r_{-\varphi}$, wobei $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben ist durch $s(x, y) = (x, -y)$ (siehe Bild 1). Wir wissen, dass die Komposition linearer Abbildungen linear ist, und wegen Teilaufgabe (c) reicht es zu zeigen, dass s linear ist. Seien $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind

$$\begin{aligned}
s(v_1 + v_2) =& s(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, -(y_1 + y_2)) \\
=& (x_1 + x_2, (-y_1) + (-y_2)) = (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = s(v_1) + s(v_2) \\
s(\lambda v_1) =& s(\lambda x_1, \lambda y_1) = (\lambda x_1, -(\lambda y_1)) = (\lambda x_1, \lambda(-y_1)) = \lambda(x_1, -y_1) = \lambda s(v_1)
\end{aligned}$$

und folglich ist s linear, und somit auch $s_g = r_\varphi \circ s \circ r_{-\varphi}$.

f) Keine Musterlösung

Siehe nächstes Blatt!

2. a) **⇒:** Angenommen T ist injektiv, dann ist $\operatorname{Ker}(T) = \{0\}$ und folglich $\operatorname{nullity}(T) = \dim \operatorname{Ker}(T) = 0$, also folgt aus der Dimensionsfolrmel und der Annahme

$$\dim W = \dim V = \operatorname{nullity}(T) + \operatorname{Rang}(T) = \operatorname{Rang}(T)$$

und also $\dim \operatorname{Im}(T) = \operatorname{Rang}(T) = \dim W$. Folglich ist $\operatorname{Im}(T)$ ein Unterraum von W von voller Dimension und also $\operatorname{Im}(T) = W$.

⇒: Angenommen T ist surjektiv, dann ist $\operatorname{Im}(T) = W$ und folglich $\operatorname{Rang}(T) = \dim \operatorname{Im}(T) = \dim W$, also folgt aus der Dimensionsformel

$$\dim V = \operatorname{nullity}(T) + \operatorname{Rang}(T) = \operatorname{nullity}(T) + \dim W$$

und wegen $\dim V = \dim W$ folgt $0 = \operatorname{nullity}(T)$.

Wir geben nun die gewünschten Gegenbeispiele. Es wurde in der Analysis ausfürlich diskutiert, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}^2$ gleichmächtig sind. Im Folgenden sei also $\varphi : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{N}$ eine Bijektion.

Sei nun $\Phi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die $\times 2$-Abbildung, i.e. $\Phi_2(n) := 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung Φ_2 ist injektiv, und folglich ist $f := \varphi^{-1} \circ \Phi_2 \circ \varphi : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ injektiv. Die Abbildung ist nicht surjektiv, da für alle $k \in \mathbb{N}$ der Vektor $\varphi^{-1}(2k+1)$ nicht im Bild von f liegt. Dies zeigt, dass durchaus eine injektive Abbildung $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ existiert, die nicht surjektiv ist.

Um zu zeigen, dass die zweite Implikation ebenfalls nicht gelten muss, definiere eine Abbildung $\psi : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{N}$ durch

$$\forall (q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2 : \ \psi(q_1, q_2) := \begin{cases} \frac{\varphi(q)}{2} & \text{falls } 2 \mid \varphi(q) \\ \frac{\varphi(q)-1}{2} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Abbildung ist surjektiv, aber nicht injektiv, und folglich ist $f := \varphi^{-1} \circ \psi$ surjektiv, aber nicht injektiv. Dies beweist, dass durchaus eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ existiert, die nicht injektiv ist.

b) Keine Musterlösung

c) Wir wissen, dass die Komposition von Abbildungen assoziativ ist, und somit ist die Verknüpfung $\cdot : \operatorname{End}(V) \times \operatorname{End}(V) \to \operatorname{End}(V)$, $(T, S) \mapsto TS := T \circ S$ assoziativ. Es gilt also Körperaxiom (K5). Die Abbildung I_V ist ein neutrales Element bezüglich dieser Verknüpfung, da für beliebiges $T \in \operatorname{End}(V)$ gilt

$$(I_V T)(v) = I_V(T(v)) = T(v), \ (T I_V)(v) = T(I_V(v)) = T(v) \quad \text{für } v \in V$$

Also gilt $I_V T = T I_V = T$ für beliebige $T \in \operatorname{End}(V)$. Es gilt also Körperaxiom (K6) und, wenn wir gezeigt haben, dass $\operatorname{End}(V)$ ein Ring ist, dann ist $\operatorname{End}(V)$ ein Ring mit Eins.

Bitte wenden!

Wir haben in der Vorlesung bereits gezeigt, dass $\operatorname{End}(V)$ mit punktweiser Addition und punktweiser Multiplikation mit Skalaren ein Vektorraum ist. Insbesondere ist $(\operatorname{End}(V), +, \mathbf{0})$ eine abelsche Gruppe, wobei $\mathbf{0}(v) := 0$ für alle $v \in V$. Es gelten also die Körperaxiome (K1)-(K4).

Wir müssen also nur noch die Kompatibilität von Addition und Multiplikation (Körperaxiom (K8)) überprüfen. Seien $S_1, S_2, T \in \operatorname{End}(V)$ und sei $v \in V$ beliebig, dann gelten

$$\begin{aligned}\big(T(S_1+S_2)\big)(v) =& T\big((S_1+S_2)(v)\big) = T\big(S_1(v)+S_2(v)\big) \\ =& T\big(S_1(v)\big) + T\big(S_2(v)\big) = (TS_1)(v) + (TS_2)(v) \\ \big((S_1+S_2)T\big)(v) =& (S_1+S_2)\big(T(v)\big) = S_1\big(T(v)\big) + S_2\big(T(v)\big) \\ =& (S_1T)(v) + (S_2T)(v)\end{aligned}$$

und da $v \in V$ beliebig war, folgenden

$$T(S_1+S_2) = TS_1 + TS_2 \quad \text{und} \quad (S_1+S_2)T = S_1T + S_2T$$

Folglich ist $\operatorname{End}(V)$ ein Ring mit Eins.

3. a) Wir müssen zeigen, dass $\operatorname{Ker}(P) \cap \operatorname{Im}(P) = \{0\}$ und $\operatorname{Ker}(P) + \operatorname{Im}(P) = V$.

- Sei $v \in \operatorname{Ker}(P) \cap \operatorname{Im}(P)$. Dann ist $v = P(v')$ für ein $v' \in V$. Da $v \in \operatorname{Ker}(P)$ und wegen Idempotenz von P folgt

  $$0 = P(v) = P(P(v')) = P^2(v') = P(v') = v$$

  und folglich ist $\operatorname{Ker}(P) \cap \operatorname{Im}(P) = \{0\}$.
- Daraus folgt

  $$\begin{aligned}\dim(\operatorname{Ker}(P) + \operatorname{Im}(P)) =& \dim \operatorname{Ker}(P) + \dim \operatorname{Im}(P) - \dim(\underbrace{\operatorname{Ker}(P) \cap \operatorname{Im}(P)}_{=\{0\}}) \\ =& \operatorname{nullity}(P) + \operatorname{Rang}(P) = \dim V\end{aligned}$$

  wegen der Dimensionsformel. Also ist $\operatorname{Ker}(P) + \operatorname{Im}(P) \subset V$ ein Unterraum voller Dimension, also $\operatorname{Ker}(P) + \operatorname{Im}(P) = V$ und da, wie bereits gezeigt, $\operatorname{Ker}(P) \cap \operatorname{Im}(P) = \{0\}$ folgt $\operatorname{Ker}(P) \oplus \operatorname{Im}(P) = V$ wie gewünscht.

b) Angenommen $V = W_1 \oplus W_2$ und $v \in V$ beliebig, dann existieren eindeutig definierte $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$, so dass $v = w_1 + w_2$. Sei nämlich $w_1 + w_2 = w_1' + w_2'$ mit $w_1' \in W_1$ und $w_2' \in W_2$, dann ist $w_1 - w_1' = w_2' - w_2 \in W_1 \cap W_2$ und wegen $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ folgt $w_1 = w_1'$ und $w_2 = w_2'$.

Siehe nächstes Blatt!

Wir definieren $P : V \to V$ durch $P(v) := w_2$, wobei $v = w_1 + w_2$ eine eindeutige Zerlegung von V mit $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$ ist. Wegen vorangehender Argumentation ist $P(v)$ wohldefiniert. Im Folgenden überprüfen wir die gewünschten Eigenschaften von P. Hierfür verwenden wir die folgende

Tatsache: Sei $v \in V$ beliebig. Sei $w \in W_2$. Dann ist $v - w \in W_1$ genau dann, wenn $P(v) = w$.

Beweis:

"$\Rightarrow$": Sei $v \in V$ beliebig und $w \in W_2$ wie oben, d.h. $v - w \in W_1$. Dann ist $v = (v - w) + w$ eine Zerlegung von v mit $(v - w) \in W_1$ und $w \in W_2$. Wegen Eindeutigkeit der Zerlegung ist per definitionem $w = P(v)$.

"$\Leftarrow$": Sei $v \in V$ beliebig, $w \in W_2$ mit $P(v) = w$. Per definitionem ist $P(v)$ die eindeutige W_2-Komponente von v, d.h. es existiert ein $w_1 \in W_1$ so dass $v = w_1 + P(v) = w_1 + w$ und folglich $v - w = w_1 \in W_1$.

Linearität von P: Seien $v_1, v_2 \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Wir müssen beweisen, dass $P(v_1 + \lambda v_2) = P(v_1) + \lambda P(v_2)$. Da $P(v_1) + \lambda P(v_2) \in W_2$, reicht es wegen eingangs bewiesener Tatsache zu zeigen, dass

$$(v_1 + \lambda v_2) - (P(v_1) + \lambda P(v_2)) \in W_1$$

Da W_1 ein Unterraum ist, gilt

$$(v_1 + \lambda v_2) - \big(P(v_1) + \lambda P(v_2)\big) = \big(\underbrace{v_1 - P(v_1)}_{\in W_1}\big) + \lambda\big(\underbrace{v_2 - P(v_2)}_{\in W_1}\big) \in W_1$$

Wegen der eingangs bewiesenen Tatsache folgt

$$P(v_1 + \lambda v_2) = P(v_1) + \lambda P(v_2)$$

Da $v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig waren, folgt also, dass P linear ist.

Idempotenz von P: Wir zeigen, dass P idempotent ist, d.h. für beliebige $v \in V$ gilt $P(P(v)) = P(v)$. Per definitionem ist $P(v) \in W_2$. Andererseits ist sicherlich $P(v) - P(v) = 0 \in W_1$ und also folgt wegen der eingangs bewiesenen Tatsache $P(P(v)) = P(v)$.

$\mathbf{Im(P) = W_2}$: Per definitionem ist $\mathrm{Im}(P) \subset W_2$. Wir müssen also nur zeigen, dass $W_2 \subset \mathrm{Im}(P)$. Sei $w \in W_2$ beliebig, dann ist $w - w = 0 \in W_1$ und wegen $w \in W_2$ und der eingangs bewiesenen Tatsache folgt $w = P(w)$. Dies zeigt, dass für jedes $w \in W_2$ ein $v \in V$ (z. Bsp. wählen wir $v := w$) existiert, mit $P(v) = w$ und folglich ist $W_2 \subset \mathrm{Im}(P)$, also $\mathrm{Im}(P) = W_2$.

$\mathbf{Ker(P) = W_1}$: Sei $v \notin W_1$, dann ist $P(v) \neq 0$, da $v = v - 0 \notin W_1$. Also gilt ${W_1}^c \subset \big(\mathrm{Ker}(P)\big)^c$ und also $\mathrm{Ker}(P) \subset W_1$.
Wir zeigen $W_1 \subset \mathrm{Ker}(P)$. Sei $w \in W_1$. Die Behauptung ist, dass $P(w) = 0$. Tatsächlich ist $w - 0 \in W_1$ und $0 \in W_2$, somit folgt $P(w) = 0$ aus der eingangs bewiesenen Tatsache. Also ist $W_1 \subset \mathrm{Ker}(P)$ und folglich $W_1 = \mathrm{Ker}(P)$.

Bitte wenden!

Alternativ argumentiert man wie folgt. Seien $v = w_1 + w_2$, $\tilde{v} = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2$ beliebige Vektoren in V mit eindeutigen Zerlegungen so dass $w_1, \tilde{w}_1 \in W_1$ und $w_2, \tilde{w}_2 \in W_2$. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$, dann ist

$$v + \lambda\tilde{v} = (w_1 + w_2) + \lambda(\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2) = (\underbrace{w_1 + \lambda\tilde{w}_1}_{\in W_1}) + (\underbrace{w_2 + \lambda\tilde{w}_2}_{\in W_2})$$

eine Zerlegung in Komponenten in W_1 und W_2. Wegen Eindeutigkeit der Zerlegung, ist also

$$P(v) + \lambda P(\tilde{v}) = w_2 + \lambda\tilde{w}_2 = P(v + \lambda\tilde{v})$$

Dies zeigt, dass P linear ist.

$\mathrm{Ker}(P)$ ist genau die Menge der Vektoren, deren W_2-Komponente 0 ist, d.h. $\mathrm{Ker}(P) = W_1 + \{0\} = W_1$.

Das Bild von P ist per definitionem in W_2 enthalten. Wir müssen also zeigen, dass jedes beliebige $w \in W_2$ im Bild von P enthalten ist. Sei also $w \in W_2$. Dann ist aber $P(w) = w$ wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung $w = 0 + w$.

4. **a)** Keine Musterlösung.

b) Keine Musterlösung.

5. **a)** Seien $v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gelten gemäss Definition der Vektorraumstruktur auf ${}^{V}\!/_{W}$

$$\begin{aligned} \pi(v_1 + v_2) &= (v_1 + v_2) + W = (v_1 + W) + (v_2 + W) = \pi(v_1) + \pi(v_2) \\ \pi(\lambda v_1) &= (\lambda v_1) + W = \lambda(v_1 + W) = \lambda\pi(v_1) \end{aligned}$$

Also ist $\pi \in \mathrm{Hom}(V, {}^{V}\!/_{W})$.

b) **"$\supset$":** Angenommen $w \in W$, dann ist $w + W = W$: Sei nämlich $v \in w + W$, dann existiert ein $w' \in W$ so dass $v = w + w'$ und also $v \in W$, so dass $w + W \subset W$. Sei andererseits $w' \in W$, dann ist $w' - w \in W$ und also $w' = w + (w' - w) \in w + W$. Es folgt also, dass $W \subset \mathrm{Ker}(\pi)$, da $W = 0_{V/W}$.

"$\subset$": Sei $v \in \mathrm{Ker}(\pi)$, dann ist $v + W = W$, insbesondere $v + W \subset W$ und somit $v \in W$, da $0 \in W$. Dies zeigt $\mathrm{Ker}(\pi) \subset W$.

Beides zusammen beweist $W = \mathrm{Ker}(\pi)$.

c) Wir wissen

$$\dim V = \mathrm{nullity}(\pi) + \mathrm{Rang}(\pi) = \dim W + \mathrm{Rang}(\pi)$$

Sei $x \in {}^{V}\!/_{W}$. Per definitionem existiert $v \in V$ so dass $x = v + W = \pi(v)$. Folglich ist π surjektiv, und also ist $\mathrm{Rang}(\pi) = \dim \mathrm{Im}(\pi) = \dim {}^{V}\!/_{W}$. Es folgt die Behauptung nach Einsetzen in obige Formel.