Serie 8:
Komposition und Matrixmultiplikation, Invertierbarkeit und Isomorphismen

1. Betrachten Sie die folgenden Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $A(2B + 3C)$, $(AB)D$ und $A(BD)$.

2. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Falls A invertierbar ist, dann ist die Inverse A^{-1} von A eindeutig.

b) Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und sei $AB = I_n$. Dann ist A invertierbar und $A^{-1} = B$.

c)
- Es ist $(AB)^T = B^T A^T$.
- Falls A invertierbar ist, dann ist A^T invertierbar und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- Falls A, B invertierbar sind, dann ist AB invertierbar und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Bitte wenden!

3. **a)** Zeigen Sie, dass *Isomorphie* eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Vektorräume definiert,[1] d.h. wenn V, W, U Vektorräume sind, dann gelten

$$\begin{aligned} &V \cong V && \text{(Reflexivität)} \\ &V \cong W \Rightarrow W \cong V && \text{(Symmetrie)} \\ &V \cong W, W \cong U \Rightarrow V \cong U && \text{(Transitivität)} \end{aligned}$$

b) Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Beweisen Sie

1. T ist genau dann injektiv, wenn T eine lineare Linksinverse besitzt, d.h. es gibt $S \in \operatorname{Hom}(W, V)$ so dass $ST = I_V$.
2. T ist genau dann surjektiv, wenn T eine lineare Rechtsinverse besitzt, d.h. es gibt $S \in \operatorname{Hom}(W, V)$ so dass $TS = I_W$.

4. Betrachten Sie den Endomorphismus $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $L_A^2 := L_A \circ L_A \neq 0$, aber $L_A^3 := L_A^2 \circ L_A = 0$.

b) Finden Sie eine Basis $\{u, v, w\}$ von $\mathbb{R}^3$ mit $L_A(u) = 0$, $L_A(v) = u$, $L_A(w) = v$ und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $[L_A]_\mathcal{B}$ bezüglich $\mathcal{B} := (u, v, w)$.

5. Ein endlicher Graph $\mathcal{G}$ ist ein Tupel (V, E), wobei V eine endliche Menge und $E \subset V^2$ eine Teilmenge ist. Intuitiv stelle man sich eine Menge von Punkten $i \in V$ und eine Menge von Kanten (direkten Wegen) $(i, j) \in V^2$ von i nach j vor. Der Graph $\mathcal{G} = (V, E)$ heisst *einfach*, falls $(i, i) \notin E$ für alle $i \in V$. Im Folgenden sind alle Graphen einfach.

Gegeben sei ein endlicher Graph $\mathcal{G} = (V, E)$, so ist die *Adjazenzmatrix* $A_\mathcal{G} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ von $\mathcal{G}$ definiert durch

$$(A_\mathcal{G})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

[1]Die Aufgabenstellung ist ungenau, da die Menge aller Vektorräume nicht existiert (dies folgt aus Russels Paradox zusammen mit der Tatsache, dass man auf jeder unendlichen Menge eine Vektorraumstruktur definieren kann). Wir können aber dennoch zeigen, dass Isomorphie die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität besitzt.

Siehe nächstes Blatt!

a) Seien $i, j \in V$. Ein *Weg* in $\mathcal{G}$ (der Länge r) von i nach j ist eine endliche Folge von Knoten $\{i_k \mid 0 \leq k \leq r\}$, so dass $i_0 = i$, $i_r = j$ und $(i_{k-1}, i_k) \in V$ für alle $1 \leq k \leq r$. Beweisen Sie für $i, j \in V$ und $r, m \in \mathbb{N}$

$$\text{Es gibt genau } m \text{ Wege der Länge höchstens } r \text{ von } i \text{ nach } j$$
$$\Leftrightarrow (A_{\mathcal{G}} + A_{\mathcal{G}}{}^2 + \cdots + A_{\mathcal{G}}{}^r)_{ij} = m$$

***b)** Gegeben ein Graph $\mathcal{G} = (V, E)$, dann definiert $\mathcal{G}$ eine *Dominanzrelation*, wenn für alle paarweise verschiedenen $i, j \in V$ gilt $(i, j) \in E \Leftrightarrow (j, i) \notin E$. Falls $(i, j) \in E$, dann sagen wir, i dominiert j. Zeigen Sie, dass $A_{\mathcal{G}} + A_{\mathcal{G}}{}^2$ eine Zeile oder Spalte besitzt, deren Einträge abseits der Diagonalen alle von 0 verschieden sind, d.h. es gibt ein $i \in V$, so dass i jedes von i verschiedene $j \in V$ in zwei Schritten dominiert.

Bemerkung: Wir stellen uns beispielsweise vor, dass die Knoten V endlich viele, verschiedene Allele repräsentieren, die sich paarweise immer in ein dominantes und ein rezessives Allel unterscheiden lassen. Dann existiert also ein Allel, das jedes andere Allel in ein oder zwei Schritten domimiert.

***6.** Im Folgenden sei $\mathbb{K}$ ein Körper in dem $2 := 1 + 1$ invertierbar ist, V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} \subset V$ eine Basis von V und seien $a, b \in \mathbb{K}^\times := \mathbb{K} \setminus \{0\}$ fix.

a) Definieren Sie eine assoziative Verknüpfung $\cdot : V \times V \to V$ durch

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \cdot v =& v \cdot \mathbf{1} = v \quad \text{für alle } v \in V \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} :=& a\mathbf{1} \quad \text{und} \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} := \mathbf{k} \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} :=& b\mathbf{1} \quad \text{und} \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} := -\mathbf{k} \end{aligned} \tag{$\heartsuit$}$$

bilinear fortgesetzt auf $V \times V$, d.h. die Abbildung $(v, w) \mapsto v \cdot w$ ist in beiden Argumenten linear bzw. für alle $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$, für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gelten

$$\begin{aligned} (v_1 + \lambda v_2) \cdot w_1 =& v_1 \cdot w_1 + \lambda(v_2 \cdot w_1) \\ v_1 \cdot (w_1 + \lambda w_2) =& v_1 \cdot w_1 + \lambda(v_1 \cdot w_2) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Verknüpfung durch die Assoziativität und die Relationen in ($\heartsuit$) eindeutig definiert ist. Wir bezeichnen im Folgenden mit $H_{a,b}(\mathbb{K})$ den (durch $\mathbb{K}$ und a, b bis auf Isomorphie vollständig bestimmten) Ring $(V, +, \cdot)$.

b) Definieren Sie auf $H_{a,b}(\mathbb{K})$ eine Abbildung $\bar{\cdot} : H_{a,b}(\mathbb{K}) \to H_{a,b}(\mathbb{K})$ durch

$$\overline{x_1\mathbf{1} + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k}} := x_1\mathbf{1} - x_2\mathbf{i} - x_3\mathbf{j} - x_4\mathbf{k}$$

und zeigen Sie, dass $\bar{\cdot}$ eine $\mathbb{K}$-lineare Involution ist (also $\overline{\overline{v}} = v$ für beliebige $v \in V$) und dass gilt $\overline{v \cdot w} = \overline{w} \cdot \overline{v}$ ($v, w \in H_{a,b}(\mathbb{K})$).

Bitte wenden!

c) Definieren Sie die Norm auf $H_{a,b}(\mathbb{K})$ durch $N(x) := x \cdot \overline{x}$ und zeigen Sie, dass $N(xy) = N(x) \cdot N(y)$. Berechnen Sie $N(x)$ explizit.† Zeigen Sie, dass ein Element in $H_{a,b}(\mathbb{K})$ genau dann eine multiplikatve Inverse besitzt, wenn $N(x) \neq 0$.

†*Hinweis:* Um viel Zeit zu sparen, zeigen Sie zuerst, dass für alle $x \in H_{a,b}(\mathbb{K})$ gilt $N(x) \in \langle \mathbf{1} \rangle$.

d) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und seien $a = b = -1$. Zeigen Sie, dass $H_{-1,-1}(\mathbb{R})$ ein Schiefkörper ist, d.h. jedes von 0 verschiedene Element in $H_{-1,-1}(\mathbb{R})$ besitzt eine multiplikative Inverse.

Bemerkung: $H_{-1,-1}(\mathbb{R})$ ist die Menge der Hamiltonquaternionen, üblicherweise bezeichnet mit $\mathbb{H}$.

e) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, sei $b = p$ prim in $\mathbb{N}$ und sei a kein Quadrat mod p, d.h. für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $a - k^2 \neq 0 \mod p$. Zeigen Sie, dass $H_{a,p}(\mathbb{Q})$ ein Schiefkörper ist.

7. Online Abgabe Serie 8:

1. Gegeben seien Matrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $C = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Ausdrücke ist nicht definiert?

(a) CA^T

(b) B^TA

(c) C^TB

(d) B^TC^T

(e) AC^T

2. (Zwischenprüfung Frühjahr 2015) Welcher der folgenden fünf Ausdrücke ist **nicht** identisch zu dem Ausdruck $(A+B)^2$ für beliebige quadratische Matrizen derselben Grösse A und B?

(a) $A^2 + 2AB + B^2$

(b) $(A+B)(B+A)$

(c) $(B+A)^2$

(d) $A(A+B) + B(A+B)$

(e) $A^2 + AB + BA + B^2$

Bitte wenden!

3. Betrachten Sie die linearen Abbildungen $T, S_1, S_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ x \end{pmatrix}, \quad S_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}, \quad S_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Dann gilt

(a) $T = S_2 \circ S_1$

(b) $T = S_1 \circ S_2$

(c) keins von beiden

(d) beide

4. Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$ und sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ geordnete Basen für V und W. So gilt $[T^2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^2$.

(a) richtig

(b) falsch

5. Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung und $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ geordnete (endliche) Basen für V und W. So gilt

$$\left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

(a) richtig

(b) falsch

6. $AB = I \implies A$ und B sind invertierbar.

(a) richtig

(b) falsch

7. Die Menge der invertierbaren Matrizen in $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist ein Unterraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

(a) Wahr

(b) Falsch

8. Die Menge der invertierbaren Matrizen in $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist eine Gruppe bezüglich Matrixmultiplikation.

(a) Wahr

(b) Falsch

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Freitag, den 18. November 12:00 Uhr mittags im Fach Ihrer Assistentin bzw. Ihres Assistenten im HG J 68.