Theorem 2 aus §2.11

Theorem: *Seien V, W endlich dimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$ mit geordneten Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Für jede lineare Abbildung $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{V}, \mathrm{W})$ definieren wir die sogenannte duale Abbildung $T^* : W^* \to V^*$ durch*

$$T^*(g) := g \circ T \quad \text{mit} \quad \mathrm{g} \in \mathrm{W}^*$$

Es gilt:

i) $T^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{W}^*, \mathrm{V}^*)$

ii) $[T^*]_{\mathcal{C}^*}^{\mathcal{B}^*} = \left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^T$

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass die Abbildung T^* wohl-definiert ist, d.h. dass $T^*(g) \in V^*$ für $g \in W^*$, was wiederum heisst, dass $T^*(g)$ eine lineare Abbildung von V nach $\mathbb{K}$ ist. Aus der Definition folgt, dass

$$T^*(g) : V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{g} \mathbb{K} : v \mapsto T(v) \mapsto g(T(v))$$

also geht $T^*(g)$ von V nach $\mathbb{K}$ und da die Komposition von linearen Abbildungen linear ist, und sowohl T wie auch g linear sind, ist die Abbildung $T^*(g)$ linear.
i) Wir müssen nun zeigen, dass die Abbildung T^* selber ein Homomorphismus ist (d.h. linear ist). Es gilt für beliebige $g_1, g_2 \in W^*$ und $\lambda \in \mathbb{K}$

$$T^*(g_1 + \lambda \cdot g_2) := (g_1 + \lambda \cdot g_2) \circ T = g_1 \circ T + \lambda \cdot g_2 \circ T =: T^*(g_1) + \lambda \cdot T^*(g_2)$$

Also wir haben $T^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{W}^*, \mathrm{V}^*)$.
ii) Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots v_n)$ eine geordnete Basis von V und $\mathcal{B}^* = (f_1, \dots, f_n)$ die dazu gehörende duale Basis d.h. $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ und sei $\mathcal{C} = (w_1, \dots w_m)$ eine geordnete Basis von W und $\mathcal{C}^* = (g_1, \dots, g_m)$ die dazu gehörende duale Basis d.h. $g_i(w_j) = \delta_{ij}$. Sei $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ die Darstellungsmatrix von T und $B = [T^*]_{\mathcal{C}^*}^{\mathcal{B}^*} \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ die Darstellungsmatrix von T^*. Es gilt $T^*(g_j) \in V^*$ und kann also als Linearkombination der Elementen von $\mathcal{B}^*$ geschrieben werden und zwar genau so (die j. Spalte der Darstellungsmatrix ist der Koordinatenvektor des Bildes des j. Basisvektors):

$$T^*(g_j) = \sum_{l=1}^{n} B_{lj} f_l$$

und somit gilt

$$T^*(g_j)(v_i) = \sum_{l=1}^{n} B_{lj} f_l(v_i) = \sum_{l=1}^{n} B_{lj}\delta_{li} = B_{ij} \tag{1}$$

Gleichzeitig gilt aber

$$(g_j \circ T)(v_i) = g_j(T(v_i)) = g_j\left(\sum_{k=1}^{m} A_{ki} w_k\right) = \sum_{k=1}^{m} A_{ki} g_j(w_k) = \sum_{k=1}^{m} A_{ki}\delta_{jk} = A_{ji} \tag{2}$$

Das dritte Gleichheitszeichen folgt aus der Linearität von g_j. Da nun aber die linken Seiten von (1) und (2) gleich sind gilt

$$B_{ij} = T^*(g_j)(v_i) := (g_j \circ T)(v_i) = A_{ji} = (A^T)_{ij}$$

und somit $B = A^T$ und die Behauptung folgt. ■