Ein Beispiel zur Bestimmung einer Jordanbasis und der Jordannormalform

Aufgabe: Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Bestimme eine Jordanbasis $\mathcal{B}$ so, dass $[L_A]_{\mathcal{B}}$ in Jordannormalform ist.

Lösung: Bestimme zuerst das charakteristische Polynom von A

$$\mathrm{char}_A(X) = -(X-3)(X-2)^2$$

Die Matrix A hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 2$ mit algebraischen Multiplizität $m_1 = 1$ und $m_2 = 2$ resp.

Wir wissen aus Theorem 4, dass $\dim(K_{\lambda_i}) = m_i$. D.h. insbesondere, dass $K_{\lambda_1} = E_{\lambda_1}$ und somit reicht es, den Eigenvektor v_1 zu bestimmen. Also lösen wir das Gleichungssystem

$$(A-3I)(v) = 0 \implies v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Und damit haben wir den ersten Zyklus $\gamma_1 = (v_1)$ gefunden, der ein Teil unser Jordanbasis sein wird, und der ein Basis von K_{λ_1} ist.

Betrachten wir nun den Eigenwert $\lambda_2 = 2$ so sehen wir, dass $\mathrm{Rang}(A-2I) = 2$ und somit gilt

$$\dim(E_{\lambda_2}) = \dim\left(\mathrm{Ker}(A-2I)\right) = 3-2 = 1 < 2 = \dim(K_{\lambda_2})$$

d.h. wir brauchen den zweiten Eigenvektor v_2 und einen verallgemeinerten Eigenvektor v_3, der also folgende Gleichung erfüllen muss

$$(A-2I)(v_3) = v_2 \iff (A-2I)^2(v_3) = 0$$

Beide lässen sich leicht bestimmen, indem man die entsprechende Gleichungssysteme löst und so finden wir

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit den zweiten Zyklus $\gamma_2 = (v_2, v_3)$, der eine Basis für den Hauptraum K_{λ_2} ist. Unsere Behauptung ist nun, dass $\mathcal{B} = \gamma_1 \cup \gamma_2 = (v_1, v_2, v_3)$ die gewünschte Jordanbasis ist und dass $[L_A]_{\mathcal{B}}$ in JNF ist. Konkreter

$$A \sim [L_A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ \quad \text{mit} \quad Q = (v_1|v_2|v_3)$$

Bemerkung: Das Rot-geschriebene ist etwas, das man nachrechnen soll und nicht einfach so "sehen" kann.