Clicker Fragen

Frage 1

Betrachte die folgende beide Aussagen:
I: Ähnliche Matrizen haben immer die gleichen Eigenwerte
II: Ähnliche Matrizen haben immer die gleichen Eigenvektoren

○ Beide Aussagen sind richtig

√ ○ Aussage I ist richtig und Aussage II ist falsch

○ Aussage I ist falsch und Aussage II ist richtig

○ Beide Aussagen sind falsch

Seien A und B ähnliche Matrizen so existiert ein $Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ mit $A = Q^{-1}BQ$. Sei u ein Eigenvektor von A mit Eigenvalue λ d.h. $Au = \lambda u$ so folgt

$$\left(Q^{-1}BQ\right)u = \lambda u \iff (BQ)\,u = Q(\lambda u) \iff B\,(Qu) = \lambda\,(Qu)$$

und somit ist Qu ein Eigenvektor von B zum Eigenwert λ. Und damit hat B die gleiche Eigenwerte wie A aber nicht unbedingt die gleiche Eigenvektoren.

Frage 2

Sei V ein Vektorraum und $T \in \mathrm{End}(V)$. Dann ist die Menge

$$E_\lambda(T) := \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$$

ein Unterraum von V.

√ ○ richtig

○ falsch

Dies folgt direkt aus der Linearität von T.

Frage 3

Seien λ_1 und λ_2 verschiedene Eigenwerte von $T \in \mathrm{End}(V)$ so gilt $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$

√ ○ richtig

○ falsch

Sei $v \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$ so gilt $T(v) = \lambda_1 v$ und $T(v) = \lambda_2 v$ und daraus folgt $(\lambda_1 - \lambda_2)v = 0$ und da die beide Eigenwerte verschieden sein, folgt $v = 0$.

Frage 4

Eine lineare Abbildung T auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V ist diagonalisierbar genau dann, wenn für jeden Eigenwert die geometrische und die algebraische Multiplizität gleich sind.

○ richtig

√ ○ falsch

Diese Aussage stimmt nur wenn das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren. Sei z.B. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ so gilt $\mathrm{char_A(X) = X^2+1}$ und über $\mathbb{R}$ hat dies gar keine Eigenwerte und ist somit auch nicht diagonalisierbar.

Frage 5

Aus $\mathrm{char}_A(X) := \det(A - X \cdot I_n)$ folgt $\mathrm{char}_A(A) =$ "Nullmatrix", weil $\mathrm{char}_A(A) = \det(A - A \cdot I_n) = \det(0_{n\times n})$

○ richtig

√ ○ falsch

Beachte, dass $\det(0_{n\times n}) = 0 \in \mathbb{K}$, aber mit $\mathrm{char}_A(A)$ ist Polynom in Matrizen gemeint, den man erhält wenn man im charakteristischen Polynom jedes X durch eine A ersetzt. Es ist also eine Linearkombination von Potenzen von A. Der Satz von Cayley-Hamilton besagt genau dass $\mathrm{char}_A(A) =$ "Nullmatrix" aber kann also nicht auf diese Art und Weise bewiesen werden.

Frage 6

Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und definiere $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(B^T A)$, so ist $\langle A, B\rangle$ symmetrisch.

√ ○ richtig

○ falsch

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^T A) = \mathrm{tr}\left((B^T A)^T\right) = \mathrm{tr}(A^T B) = \langle B, A\rangle$$

Frage 7

Seien $\langle,\rangle_1$ und $\langle,\rangle_2$ zwei Skalarprodukte auf V so gilt

$$\langle v, w\rangle_1 = 0 \iff \langle v, w\rangle_2 = 0$$

○ richtig

√ ○ falsch

Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $\langle,\rangle_2$ das Standardskalarprodukt, so gilt $\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\rangle_2 = 0$. Definiere nun $\langle v, w\rangle_1 := v_1w_1 + 2v_2w_2$ und überprüfen Sie selber dass dies in der Tat ein Skalarprodukt definiert. Es ist nun schnell gesehen, dass $\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\rangle_1 = 1 - 2 \neq 0$.

Frage 8

Sei $(V, \langle,\rangle)$ ein endl.dim.Eukl.Vektorraum und g ein Element im Dualraum, so existiert ein eindeutiges $v \in V$, so dass

$$g(u) = \langle u, v\rangle \forall u \in V$$

√ ○ stimmt

○ stimmt nicht

Dies ist die Herzlein-Aufgabe 6a aus der Serie 4

Frage 9

Sei $(V, \langle,\rangle)$ ein endl.dim.Eukl.Vektorraum und $T, S \in \text{End}(V)$. Welche der folgenden Behauptungen stimmt / stimmen?

√ ○ $(T + S)^* = T^* + S^*$

○ $(T \circ S)^* = T^* \circ S^*$

√ ○ $(T^*)^* = T$

√ ○ $\text{id}_\text{V}^* = \text{id}_\text{V}$

Wir wissen, dass $[T^*]_\mathcal{B} = [T]_\mathcal{B}^T$. Zusammen mit der Isomorphie zwischen Endomorphismen und quadratischen Matrizen, folgen die Aussagen i), iii) und iv) sofort. Zusätzlich gilt

$$[(T \circ S)^*]_\mathcal{B} = [T \circ S]_\mathcal{B}^T = ([T]_\mathcal{B}[S]_\mathcal{B})^T = [S]_\mathcal{B}^T[T]_\mathcal{B}^T = [S^*]_\mathcal{B}[T^*]_\mathcal{B}$$

und daraus folgt $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$. Da die Matrizenmultiplikation in der Regel nicht kommutativ ist, ist das Resultat ii) im Allgemeinen falsch.

Frage 10

Betrachte die Menge

$$O(n) := \{Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \,|\, QQ^T = Q^TQ = I_n\}$$

Welche Aussagen sind richtig?

√ ◯ $I_n \in O(n)$

√ ◯ $Q \in O(n) \implies Q^{-1} \in O(n)$

√ ◯ $Q_1, Q_2 \in O(n) \implies Q_1Q_2 \in O(n)$

i) ist klar; ii) wenn $Q \in O(n)$ so gilt $Q^{-1} = Q^T$ und offensichtlich gilt $Q^T \in O(n)$; iii) es gilt

$$(Q_1Q_2)^T(Q_1Q_2) = Q_2^TQ_1^TQ_1Q_2 = Q_2^TQ_2 = I_n$$

und analog $(Q_1Q_2)(Q_1Q_2)^T = I_n$.

Frage 11

Sei $(V, \langle,\rangle) = (\mathbb{R}^2, \langle,\rangle_{stand})$ und $T \in \mathrm{End}(V)$ mit

$$T(x, y) = (2x - 2y, -2x - 5y)$$

√ ◯ so ist T selbstadjungiert

◯ so ist T nicht selbstadjungiert

Beachte, dass $[T]_{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ symmetrisch ist. Nun ist jede symmetrische Matrix kongruent (sogar orthogonal äquivalent) zu einer Diagonalmatrix und damit existiert eine ONB aus Eigenvektoren. Das Korollar zum Hauptachsentransformation sagt nun, dass in diesem Fall T selbstadjungiert ist.

Frage 12

Seien S und T zwei selbstadjungierte Abbildungen auf dem endl.dim.Eukl.Vektorraum V so ist auch die Komposition $T \circ S$ selbstadjungiert.

◯ richtig

√ ◯ falsch

Beachte, dass für eine ONB $\mathcal{B}$ für T und S gilt

$$[(T \circ S)^*]_{\mathcal{B}} = [(T \circ S)]_{\mathcal{B}}^T = ([T]_{\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B}})^T = [S]_{\mathcal{B}}^T[T]_{\mathcal{B}}^T = [S]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} = [S \circ T]_{\mathcal{B}}$$

aber damit haben wir gezeigt, dass $(T \circ S)^* = S \circ T$ und dass ist nicht die Definition von selbstadjungiert (dazu müssten die Darstellungsmatrizen von T und S noch kommutieren).

Frage 13

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, so gilt $\dim(\mathrm{BF}(V)) = n^2$.

√ ◯ stimmt

◯ stimmt nicht

Theorem 2 in §7.1 zeigt dass $\mathrm{BF}(V)$ isomorph ist zu $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und damit ist die Dimension vom ersten Vektorraum gleich zu der vom zweiten, und die ist n^2.

Frage 14

Seien A und B zwei kongruente Matrizen, so haben sie die gleichen Eigenwerte.

◯ richtig

√ ◯ falsch

Betrachte das folgende Beispiel

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B := Q^T A Q$$

so ist $Q \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$, also sind A und B kongruent, aber $\sigma(A) = \{1, 1\}$ und $\sigma(B) = \{4, 4\}$

Frage 15

Sei T eine selbstadjungierte Abbildung auf V bez. dem Skalarprodukt $\langle\, , \rangle_1$. Sei $\langle\, , \rangle_2$ ein anderes Skalarprodukt auf V, so ist T auch bez. diesem Skalarprodukt selbstadjungiert.

◯ richtig

√ ◯ falsch

Sei $V = \mathbb{R}^2$, $\langle\, , \rangle_1$ das Standardskalarprodukt und $T(x, y) = (x - y, -x + 2y)$. Die Darstellungsmatrix von T bez. der Standardbasis (welche eine ONB ist für das Standardskalarprodukt) ist symmetrisch und somit ist T selbstabjungiert bez. $\langle\, , \rangle_1$. Sei nun

$$\langle (x_1, y_1)^T, (x_2, y_2)^T \rangle_2 := x_1 x_2 + 4 y_1 y_2$$

so ist dies auch ein Skalarpodukt (überzeuegen Sie sich selber!) und als ONB nehmen wir $\mathcal{B} = \left((1, 0)^T, (0, \frac{1}{2})^T\right)$. Dann haben wir als Darstellungsmatrix von T

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

und diese Matrix ist nicht symmetrisch und deshalb ist T nicht selbstadjungiert in diesem Skalarprodukt.

Frage 16

Seien A und B zwei kongruente Matrizen so gilt $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(B)$.

√ ◯ richtig

◯ falsch

Kongruent bedeutet falls $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ so existiert ein $Q \in Gl_n(\mathbb{K})$, so dass $B = Q^T AQ$. Da aber Q und somit auch Q^T invertierbar ist, ändern sie den Rang nicht und deshalb ist die Aussage richtig.

Frage 17

Sei V ein 2-dim. Euklidischer Vektorraum. Dann ist die Komposition von einer Reflexion und einer Rotation immer eine Reflexion.

√ ◯ richtig

◯ falsch

Nach einem Theorem aus der Vorlesung sind die 2-dim.orthogonale Abbildungen vollständig klassifiziert durch Rotationen (mit Determinante gleich 1) und Reflexionen (mit Determinante gleich -1). Setzt man nun zwei Abbildungen zusammen so ist die Determinante der Komposition nichts anderes als das Produkt der Determinanten, also in diesem Fall -1 und damit kann die Komposition nichts anderes als eine Reflexion sein.

Frage 18

Die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : v \mapsto \|v\|_\infty^2 := \max\{|v_i|; 1 \le i \le n\}^2$$

ist homogen vom Grad 2.

√ ◯ richtig

◯ falsch

Eine Abbildung $f : V \to \mathbb{K}$ ist homogen vom Grad 2 wenn $f(\lambda v) = \lambda^2 f(v)$ für alle $v \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$. Man sieht sofort, dass dies stimmt

$$\begin{aligned}
\|\lambda \cdot v\|_\infty^2 &= \max\{|\lambda \cdot v_i|; 1 \le i \le n\}^2 \\
&= \max\{|\lambda| \cdot |v_i|; 1 \le i \le n\}^2 \\
&= |\lambda|^2 \cdot \max\{|v_i|; 1 \le i \le n\}^2 \\
&= \lambda^2 \cdot \max\{|v_i|; 1 \le i \le n\}^2 \\
&= \lambda^2 \cdot \|v\|_\infty^2
\end{aligned}$$

Frage 19

Die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : v \mapsto \|v\|_\infty^2 := \max\{|v_i|; 1 \leq i \leq n\}^2$$

definiert eine Bilinearform mittels

$$\beta(u, v) := \frac{1}{2}\left(\|u + v\|_\infty^2 - \|u\|_\infty^2 - \|v\|_\infty^2\right)$$

○ richtig

√ ○ falsch

Um zu zeigen, dass β keine Bilinearform definiert, reicht es ein Gegenbesipiel zu konstruieren. Setzen Sie z.B. $u = e_1$ und $v = e_1 + e_2$ und berechnen Sie sowohl $\beta(u, v)$ direkt und als $\beta(e_1, e_1) + \beta(e_1, e_2)$, dann werden Sie sehen dass man nicht zwei mal das gleiche Resultat erhält und somit ist β also nicht bilinear.

Frage 20

Die Menge aller Sesquilinearformen ist ein komplexer Vektorraum

√ ○ richtig

○ falsch

Die Menge aller Sesquilinearformen ist eine Teilmenge des komplexen Vektorraumes aller Abbildungen $V \times V \to \mathbb{C}$. Es reicht also zu zeigen, dass sie ein Unterraum ist. Es ist klar, dass die Null-Bilinearform auch eine Sesquilinearform ist. Seien nun γ_1, γ_2 zwei Sesquilinearformen und $\lambda \in \mathbb{C}$ dann gilt für alle $u, v, w \in V, \mu \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
(\gamma_1 + \lambda\gamma_2)(u, v + \mu w) &= \gamma_1(u, v + \mu w) + \lambda\gamma_2(u, v + \mu w) \\
&= \gamma_1(u, v) + \mu\gamma_1(u, w) + \lambda\gamma_2(u, v) + \lambda\mu\gamma_2(u, w) \\
&= \gamma_1(u, v) + \lambda\gamma_2(u, v) + \mu\gamma_1(u, w) + \lambda\mu\gamma_2(u, w) \\
&= (\gamma_1 + \lambda\gamma_2)(u, v) + \mu(\gamma_1 + \lambda\gamma_2)(u, w)
\end{aligned}$$

Also $\gamma_1 + \lambda\gamma_2$ is linear im zweiten Argument und

$$\begin{aligned}
(\gamma_1 + \lambda\gamma_2)(v + \mu w, u) &= \gamma_1(v + \mu w, u) + \lambda\gamma_2(v + \mu w, u) \\
&= \gamma_1(v, u) + \overline{\mu}\gamma_1(w, u) + \lambda\gamma_2(v, u) + \lambda\overline{\mu}\gamma_2(w, u) \\
&= \gamma_1(v, u) + \lambda\gamma_2(v, u) + \overline{\mu}\gamma_1(w, u) + \lambda\overline{\mu}\gamma_2(w, u) \\
&= (\gamma_1 + \lambda\gamma_2)(v, u) + \overline{\mu}(\gamma_1 + \lambda\gamma_2)(w, u)
\end{aligned}$$

konjugiert linear im ersten Argument und somit ist die Linearkombination $\gamma_1 + \lambda\gamma_2$ selber auch wieder ein Sesquilinearform und somit ist die Aussage bewiesen.

Frage 21

Die Menge aller hermiteschen Formen ist ein Unterraum des Vektorraumes aller Sesquilinearformen

- ◯ stimmt
- √ ◯ stimmt nicht

Sei γ eine hermitesche Form so gilt: $\gamma(v,u) = \overline{\gamma(u,v)}$. Betrachte nun die ausgewählte Linearkombination $i \cdot \gamma$ so gilt $(i \cdot \gamma)(v,u) = i \cdot \gamma(v,u) = i \cdot \overline{\gamma(u,v)} \neq \overline{i \cdot \gamma(u,v)} = -i \cdot \overline{\gamma(u,v)}$ und damit bilden die hermitesche Formen keinen Unterraum weil Linearkombinationen nicht unbedingt auch hermitesch sind.

Frage 22

Die QR-Zerlegung basiert auf die Idee...

- ◯ der Gauss-Elimination
- √ ◯ von Gram-Schmidt
- ◯ dass TT^* selbstadjungiert und nicht-negativ definit ist

Die Methode der Gauss-Elimination führt zu einer LR-Zerlegung und TT^* selbstadjungiert und nicht negativ definit ist die Grundidee der Singulärwertzerlegung. Die Methode von Gram-Schmidt produziert eine ONB, die ist das Q und durch sukzesive subtrahieren von Vielfachen von Vektoren erhält man einen oberen Dreiecksmatrix - mehr oder weniger das R.

Frage 23

Alle unitären Matrizen sind über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

- √ ◯ stimmt
- ◯ stimmt nicht

Eine Matrix $U \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ heisst unitär wenn

$$UU^* = U^*U = I_n$$

und somit sieht man sofort dass in dem Fall U mit der Adjungierte U^* kommutiert. D.h. U ist normal und das wiederum ist äquivalent zu U ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix oder auch U ist diagonalisierbar.

Frage 24

Betrachten Sie die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
und die folgende beide Aussagen:

I. A ist diagonalisierbar

II. Es existiert eine ONB aus Eigenvektoren von A bezüglich dem Standardskalarprodukt.

- ◯ Beide Aussagen sind richtig
- √ ◯ I ist richtig, II ist falsch
- ◯ I ist falsch, II ist richtig
- ◯ beide sind falsch

Da die beide Eigenwerte von A gleich 1 und 2 sind, insbesonder verschieden sind, ist A diagonalisierbar. Rechnet man aber nach, so sieht man dass $AA^T \neq A^TA$ und somit ist A nicht normal und deshalb gibt's keine ONB bestehend aus Eigenvektoren von A.

Frage 25

Sei $A \in M_{10\times 10}(\mathbb{C}), \operatorname{char}_A(X) = (X-5)^{10}$ und $\dim(E_5) = 3$. Wie viele (bis auf Permutation der Jordanblöcke) verschiedene JNF gibt es für A?

- ◯ 5
- √ ◯ 8
- ◯ 10
- ◯ 12

$\dim(E_5) = 3$ bedeutet dass der JNF von$A$ aus drei verschiedenen Jordanblöcken besteht. Der Rest der Aufgabe ist Kombinatorik: auf wie viel Arten kann man 10 schreiben als Summe von drei (positiven natürlichen) Zahlen: Man sieht leicht, dass

$10 = 1{+}1{+}8 = 1{+}2{+}7 = 1{+}3{+}6 = 1{+}4{+}5 = 2{+}2{+}6 = 2{+}3{+}5 = 2{+}4{+}4 = 3{+}3{+}4$

Also ist die Antwort 8.

Frage 26

Sei $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}), (2 \neq 0)$ und $A = A^{-1}$ so ist A diagonalisierbar.

√ ◯ stimmt

◯ stimmt nicht

Aus $A = A^{-1}$ folgt $A^2 = I_2$ und somit $\sigma(A^2) = \{1\}$. Betrachte nun den Abschluss $\overline{\mathbb{K}}$ von $\mathbb{K}$. So hat A über $\overline{\mathbb{K}}$ sicher einen Eigenvektor mit Eigenwert λ. Für dieses λ muss gelten $\lambda^2 = 1$. Daraus folgt aber dass $\lambda = \pm 1 \in \overline{\mathbb{K}}$ aber $\pm 1 \in \mathbb{K}$, also hat A auch schon einen Eigenvektor über $\mathbb{K}$. D.h.

$$\sigma(A) = \{1\}, \{-1\} \,\text{oder}\, \{1, -1\}$$

Falls $\sigma(A) = \{1\}$ so ist A ähnlich zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder zu $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Das letzte würde bedeuten dass A nicht diagonalisierbar ist. Dies kann aber nicht vorkommen weil dies die Bedingung $A = A^{-1}$ verletzt. Der Fall $\sigma(A) = \{-1\}$ ist analog. Und falls $\sigma(A) = \{1, -1\}$ so hat A zwei verschiedene Eigenwerte und ist somit diagonalisierbar.