D-Math/Phys | Lineare Algebra I | HS 2017
Dr. Meike Akveld

Clicker Fragen

Frage 1

Die Aussage “Dieser Satz ist falsch” ist

○ wahr

√ ○ falsch

Dies ist die einfachste Form des Lügner-Paradoxes ist der folgende selbstbezügliche Satz. Die Paradoxie dieses Satzes besteht darin, dass sich nicht vernünftigerweise behaupten lässt, er sei wahr oder falsch. Angenommen er wäre falsch: Dann würde das zutreffen, was der Satz selbst behauptet, und er müsste also wahr sein. Nehmen wir aber an, er sei wahr, dann trifft das, was der Satz behauptet, nicht zu was bedeutet, dass er falsch ist

Frage 2

Betrachte die Teilmengen $P, Q \subset X$. Welche der folgenden Aussagen stimmen?

√ ○ $\chi_{P\cap Q} = \min\{\chi_P, \chi_Q\}$.

√ ○ $\chi_{P\cap Q} = \chi_P \cdot \chi_Q$.

○ $\chi_{P\cup Q} = \min\{\chi_P, \chi_Q\}$.

√ ○ $\chi_{P\cup Q} = \chi_P + \chi_Q - \chi_{P\cap Q}$

Siehe Aufgabe 2, Serie 2.

Frage 3

Wir betrachten in dieser Aufgabe nur Relationen auf $\{1, 2, 3\}$. Welche der folgenden Aussagen ist oder sind richtig?

$\surd$ ◯ Die minimale Anzahl der Elemente einer Äquivalenzrelation ist 3.

$\surd$ ◯ Die Menge $\{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$ bildet eine Äquivalenzrelation.

◯ Die kleinste Äquivalenzrelation, die $(1, 2)$ und $(2, 3)$ enthält, hat 7 Elemente.

$\surd$ ◯ Die Anzahl der Äquivalenzrelationen mit 5 Elementen ist 3.

Zu i) die Relexivitätseigenschaft besagt dass für alle Elemente gelten muss, dass xRx. D.h. dass jede Äquivalenzrelation die Elemente $(1, 1), (2, 2), (3, 3)$ enthalten muss. Es lässt sich leicht überprüfen dass diese drei Elemente eine Äquivalenzrelation bilden (Symmetrie ist klar und bei der Transitivität gibt's in diesem Fall nichts zu überprüfen).

Zu ii) Relexivität und Symmetrie sind klar. Die Transitivität folgt: $1R1$ und $1R3$ impliziert $1R3$ und genauso für $(3, 1)$ und $(1, 1)$.

Zu iii) die Reflexivität besagt dass wir sicher die Paare $(1, 1), (2, 2)$ und $(3, 3)$ brauchen. Aus der Symmetrie folgt dass wir zusätzlich $(2, 1)$ und $(3, 2)$ dazu nehmen müssen. Nun besagt aber die Transitivität dass wenn die Paare $(1, 2)$ und $(2, 3)$ dabei sind auch $(1, 3)$ dabei ist und somit auch $(3, 1)$ und somit haben wir mindestens 9 Elemente.

Zu iv) Ein Beispiel ist die Äquivalenzrelation in ii). Wählt man stattdessen das Paar $(1, 2)$ oder $(2, 3)$ mit "Spiegelbild" so haben wir alle Möglichkeiten mit 5 Elementen.

Frage 4

Welche Elemente von $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ haben eine Inverse für die Multiplikation?

- ○ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- ○ $\{1, 3, 5\}$
- √ ○ $\{1, 5\}$
- ○ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ○ keine

Wir betrachten die Cayley-Tafel für die Multiplikation in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Man sieht sofort, dass 0 kein Inverses Element hat und dass 1 das neutrale Element ist (da $\forall a \in \mathbb{Z}_6 : 1 \cdot a = a$). Die Frage ist nun für welche $a \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ existiert ein $b \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ mit $a \cdot b = 1$ und man sieht, dass dies nur für 1 und 5 möglich ist.

Frage 5

Sei $V = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$ und definiere die folgende Verknüpfungen

$$V \times V \to V : ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + 2x_2, y_1 + 3y_2)$$

$$\mathbb{R} \times V \to V : (\lambda, (x, y)) \mapsto \lambda \cdot (x, y) := (\lambda x, \lambda y)$$

- ○ so ist V ein Vektorraum
- √ ○ so ist V kein Vektorraum

Man überprüft leicht, dass die Verknüpfung "Addition" weder kommutativ noch assoziativ ist.

Frage 6

Sei V ein Vektorraum über K und $W \subset V$ eine Teilmenge. Die Aussage:

$$\forall u \in V \, \forall \lambda \in K \, : \, \lambda u \in W \implies 0_V \in W$$

◯ ist richtig

√ ◯ ist falsch

Wenn wir annehmen könnten, dass W nicht-leer ist, so könnten wir ein beliebiges Element w aus W wählen und da $0 \in K$ hätten wir $0 \cdot w \in W$ also $0_V = 0 \cdot w \in W$. Wir wissen aber nicht, dass W nicht-leer ist und deshalb ist die Aussage falsch. (Wenn $W = \emptyset$ so gäbe es kein einziges Element in $w \in W$ mit der Eigenschaft $0 \cdot w = 0_V$.)

Frage 7

Sei S ein Erzeugendensystem von V, so kann man jeder Vektor in V als eindeutige Linearkombination der Elemente in S schreiben

◯ richtig

√ ◯ falsch

Ein Erzeugendensystem muss nicht linear unabhängig sein und deshalb ist die Eindeutigkeit nicht garantiert.

Frage 8

Der Nullvektor ist eine Linearkombination von jeder beliebigen nicht-leeren Menge von Vektoren

√ ◯ richtig

◯ falsch

Da die Menge nicht leer ist, gibt es einen Vektor u und somit gilt $0_V = 0 \cdot u$. Wir haben also der Nullvektor als Linearkombination geschrieben.

Frage 9

Eine Familie von Vektoren, die den Nullvektor enthält, ist immer linear abhängig

√ ◯ richtig

◯ falsch

Da $k \cdot 0_V = 0_V$ für alle $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, hat's in dieser Menge immer eine nicht-triviale Darstellung des Nullvektors und somit ist die Menge nach Definition linear abhängig.

Frage 10

Was ist die Dimenson desVektorräumes $\mathbb{C}$?

- ◯ $\dim(\mathbb{C}) = 1$
- ◯ $\dim(\mathbb{C}) = 2$
- √ ◯ Es fehlen Angaben um dies zu entscheiden

Wie in der Vorlesung besprochen hängt die Dimension eines Vektorräumes davon ab was der zu grundlegender Körper ist. Betrachen wir $\mathbb{C}$ als Vektorraum über den Körper $\mathbb{C}$ so kann man als Basis $\mathcal{B} = \{1\}$ wählen, da $< \{1\} >:= \{\lambda \cdot 1 \,|\, \lambda \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}$, also gilt $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$. Betrachtet man aber nun $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ so reicht die obige Basis nicht, da $< \{1\} >:= \{\lambda \cdot 1 \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \neq \mathbb{C}$. Wählen wir stattdessen als Basis $\mathcal{B} = \{1, i\}$, so ist die in der Tat eine Basis (überprüfen Sie selber die beide Eigenschaften die eine Basis haben muss) und somit gilt $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.

Frage 11

Seien V und W zwei endlich-dimensionale Vektorräume und betrachten Sie die äussere direkte Summe $V \oplus W$. Seien $\mathcal{B}_V = \{e_1, \dots e_m\}$, $\mathcal{B}_W = \{f_1, \dots f_n\}$ Basen von V und W. So ist

$$\mathcal{B} := \{(e_i, f_j) | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

eine Basis von $V \times W$

- ◯ richtig
- √ ◯ falsch

Nach Definition gilt $V \oplus W := \{(v, w) \,|\, v \in V, w \in W\}$. Insbesondere sind die Vektoren $(e_i, 0_W)$ und $(0_V, f_j)$ Elemente von $V \oplus W$. Es ist aber nicht möglich sie als Linearkombination der angeblichen Basis zu schreiben und deshalb kann es keine Basis sein. Konret: Es ist unmöglich $\lambda_{ij} \in K$ so zu bestimmen, das gilt

$$(e_k, 0_W) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} (e_i, f_j)$$

weil aus der linearen unabhängigkeit von $\mathcal{B}_V$ folgt, dass $\lambda_{ij} = 0$ falls $i \neq k$ und somit erhält man

$$(e_k, 0_W) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{kj} (e_k, f_j) = (\sum_{j=1}^{n} \lambda_{kj} e_k, \sum_{j=1}^{n} \lambda_{kj} f_j)$$

Da auch $\mathcal{B}_W$ eine Basis ist, folgt $\lambda_{kj} = 0$ für alle $1 \leq j \leq n$.

Frage 12

Betrachte den Körper $\mathbb{F}_5$ und und den Unterraum W

$$W := \langle (1,1) \rangle \subseteq \mathbb{F}_5^2$$

So gilt $|\mathbb{F}_5^2/W| = 5$.

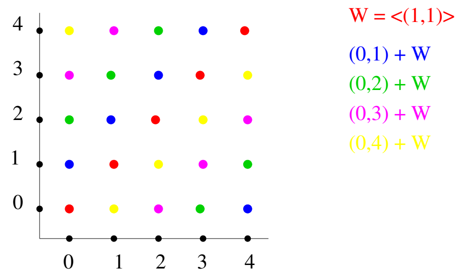
$\surd$ ◯ richtig

◯ falsch

Aus der Dimensionsformel für den Quotientenraum, wissen wir, dass

$$\dim\left(\mathbb{F}_5^2/W\right) = \dim\left(\mathbb{F}_5^2\right) - \dim\left(W\right) = 2 - 1 = 1$$

und ein ein-dimensionaler Unterraum über $\mathbb{F}_5$ hat 5 Elemente. Dies ist veranschaulicht im untenstehenden Bild. Der Unterraum W ist rot und jede Nebenklasse hat eine eigene Farbe. Es gibt also 5 Nebenklassen und jede hat selber 5 Elemente. Die Anzahl Nebenklassen ist aber die Kardinalität vom Quotientenraum und damit in diesem Fall 5.



Frage 13

Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax + b$$

ist eine lineare Abbildung

◯ richtig

$\surd$ ◯ falsch

Da $f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) + b \neq ax_1 + b + ax_2 + b = f(x_1) + f(x_2)$ ist dies nicht allgemein wahr, sonder nur wenn $b = 0$.

Frage 14

Seien V und W Vektorräume. Gegeben $v_1, v_2 \in V$ und $w_1, w_2 \in W$ so existiert eine lineare Abbildung mit $T(v_1) = w_1$ und $T(v_2) = w_2$.

- ◯ richtig
- √ ◯ falsch

Dies ist nicht allgemein wahr, wenn z.B. v_1 und v_2 linear abhängig sein, d.h. $v_1 = \lambda v_2$ für irgendein $\lambda \in \mathbb{K}$, so muss gelten $T(v_1) = T(\lambda v_2) = \lambda T(v_2)$ was impliziert, dass $w_1 = \lambda w_2$ was natürlich nicht für beliebige $w_1, w_2 \in W$ gilt. Die Aussage wäre aber wahr wenn v_1 und v_2 linear unabhängig wären.

Frage 15

Betrachte den Vektorraum $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ mit der standard geordneten Basis

$$\mathcal{B} = \left(E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

und die lineare Abbildung

$$T : M_{2\times 2}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} : A \mapsto \mathrm{Tr(A)}$$

wobei wir für $\mathbb{K}$ die Basis $\{1\}$ wählen. Was ist die Darstellungsmatrix $[T]_{\mathcal{B}}^{\{1\}}$?

- ◯ $A_{11} + A_{22}$
- √ ◯ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ◯ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ◯ Keine der obigen drei

Wir haben in der Vorlesung gelernt, dass die j. Spalte der Darstellungsmatrix nichts anderes ist als $[T(v_j)]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ wobei v_j der j. Basisvektor aus der geordneten Basis $\mathcal{B}$ ist. Nun gilt in diesem Fall $T(E_1) = T(E_4) = 1 = 1 \cdot 1$ und $T(E_2) = T(E_3) = 0 = 0 \cdot 1$ und da der Zielbereich 1-dimensional ist, haben die Spalten Länge 1 und sind somit 1, 0, 0 und 1. Das Resultat ist also eine 1×4 Matrix und die Antwort b) hat in der Tat auch die richtige Einträge.

Frage 16

Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ und I_n die Identitätsmatrix. So gilt

$$A^2 = I_n \implies A = I_n \vee A = -I_n$$

○ richtig

√ ○ falsch

Für $n = 1$ ist diese Aussage richtig ($a^2 = 1 \implies a = 1 \vee a = -1$). Für Matrizen stimmt sie aber nicht, als Gegenbeispiel betrachten wir die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Offensichtlich gilt $A^2 = I_2$ aber die Implikation ist nicht richtig. Diese Matrix gehört zu der linearen Abbildung $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die geometrisch zu interpretieren ist als Spiegelung an der x-Achse.

Frage 17

Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume über K. Welche der folgenden Aussagen sind richtig

○ $\mathrm{Hom(V, W) = Hom(W, V)}$

√ ○ $\dim\left(\mathrm{Hom(V, W)}\right) = \dim\left(\mathrm{Hom(W, V)}\right)$

Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass

$$\mathrm{Hom(V, W) \cong Mat_{n\times m}(K)}$$

und somit

$$\mathrm{Hom(W, V) \cong Mat_{m\times n}(K)}$$

Wenn $n \neq m$ sind diese beide Matrizenräume nicht gleich und damit die Räume der Homomorphismen auch nicht. Die Dimensionen stimmen aber überein da $m \cdot n = n \cdot m$.

Frage 18

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum, so gilt

$$\dim(V) = \dim(V^*)$$

√ ○ richtig

○ falsch

Sei $\dim(V) = n$ so gilt

$$\dim_K(V^*) = \dim_K(\mathrm{Hom(V, K)}) = \mathrm{\dim_K(V) \cdot \dim_K(K) = n \cdot 1 = \dim_K(V)}$$

Frage 19

Sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) = 4$, so gibt es ein $f \in V^*$ mit $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 2$

◯ richtig

√ ◯ falsch

$f \in V^*$ bedeutet, dass f eine lineare Abbildung von V nach K ist. Aus der Dimensionsformel folgt

$$\dim(V) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$$

Da aber $\operatorname{Im}(f) \subset K$ gilt $\dim(\operatorname{Im}(f)) \leq 1$ und aus $\dim(V) = 4$ folgt dann sofort $\dim(\operatorname{Ker}(f)) \geq 3$

Frage 20

Sei $\Phi : V \to V^*$ ein Isomorphismus und $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V. Dann gilt $\Phi(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^*$.

◯ richtig

√ ◯ falsch

Sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V so ist die duale Basis $\mathcal{B}^* = (f_1, \ldots, f_n)$ eindeutig bestimmt durch die definierende Eigenschaft $f_i(v_j) = \delta_{ij}$. Sei nun Φ irgendein Isomorphismus, so stimmt es zwar dass $\Phi(\mathcal{B})$ eine Basis von V^* ist, aber es muss überhaupt nicht sein, dass es genau $\mathcal{B}^*$ ist.

Frage 21

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

√ ◯ Eine Elementarmatrix ist immer quadratisch

◯ Die einzige Einträge in einer Elementarmatrix sind Einsen und Nullen.

√ ◯ Die $n \times n$ Identitätsmatrix ist eine Elementarmatrix.

◯ Das Produkt von zwei Elementarmatrizen ist eine Elementarmatrix.

◯ Die Summe von zwei Elementarmatrizen ist eine Elementarmatrix.

√ ◯ Die Inverse einer Elementarmatrix ist eine Elementarmatrix.

√ ◯ Die Transponierte einer Elementarmatrix ist eine Elementarmatrix.

i) Richtig: Dies ist per Definition so (eine Elemenarmatrix ist erhalten durch eine elementare Zeilen- (oder Spalten-)Umformung auf die Identitätsmatrix.

ii) Falsch: Wenn man die i. Zeile mit einem Faktor c multipliziert so steht an der Stelle $E_{i,i}$ den Faktor c.

iii) Richtig: Wenn man bei der Identitätsmatrix zu der i.Zeile 0 mal die j.Zeile addiert so ist das Resultat wiederum die Identitätsmatrix. ist

iv) Falsch: Gegenbeispiel

$$E_1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M$$

E_1 und E_2 sind Elementarmatrizen. M ist aber das Resultat von Vertauschen der 1. und 2. Zeile und Vertauschen der 3. und 4. Zeile und das ist mehr als **eine** elementare Umformung.

v) Falsch: Gegenbeispiel

$$E_1 + E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = M$$

Auch hier sind wieder E_1 und E_2 Elementarmatrizen, aber M nicht.

vi) Richtig: Folgt as Theorem 2, §3.1.

vii) Richtig: Überlegen Sie selber wie die Elementarmatrizen und ihre Transponierten aussehen und zu welchen elementaren Umformungen diese gehören.

Frage 22

Welche der folgenden Abbildungen ist multilinear?

- √ ◯ Das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$
- √ ◯ Die 2×2 Determinante
- √ ◯ Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und definiere $F(A) = 0$.
- √ ◯ Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und definiere $F(A) = A_{1j} \cdot \dots \cdot A_{nj}$.
- √ ◯ Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und definiere $F(A) = A_{11} \cdot \dots \cdot A_{nn}$.
- ◯ Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und definiere $F(A) = \mathrm{tr(A)}$.

i) Das Skalarprodukt $\langle\, , \,\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist multilinear – überprüfen Sie selber dass

$$\langle u_1 + \lambda u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \lambda\langle u_2, v\rangle$$

für alle $u_1, u_2, v \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Aus der Symmetrie folgt die Linearität in der 2.Zeile.

ii) Folgt aus den Eigenschaften der 2×2 Determinante.
Sei in den nächsten Teilantworten

$$A := \left(A_{(1)}, \dots, A_{(i-1)}, A_{(i)}, A_{(i+1)}, \dots, A_{(n)}\right)$$
$$\tilde{A} := \left(A_{(1)}, \dots, A_{(i-1)}, \tilde{A}_{(i)}, A_{(i+1)}, \dots, A_{(n)}\right)$$
$$B := \left(A_{(1)}, \dots, A_{(i-1)}, A_{(i)} + c\tilde{A}_{(i)}, A_{(i+1)}, \dots, A_{(n)}\right)$$

wobei alle $A_{(j)} \in \mathbb{K}^n$ Zeilen sind und $c \in \mathbb{K}$.

iii) $0 = F(B) = F(A) + c \cdot F(\tilde{A}) = 0 + c \cdot 0 = 0$

iv) Wie v)

v) Es gilt

$$\begin{aligned} F(B) &= A_{11} \cdot \dots \cdot \left(A_{ii} + c\tilde{A}_{ii}\right) \cdot \dots \cdot A_{nn} \\ &= A_{11} \cdot \dots \cdot A_{ii} \cdot \dots \cdot A_{nn} + A_{11} \cdot \dots \cdot \left(c\tilde{A}_{ii}\right) \cdot \dots \cdot A_{nn} \\ &= (A_{11} \cdot \dots \cdot A_{ii} \cdot \dots \cdot A_{nn}) + c\left(A_{11} \cdot \dots \cdot \tilde{A}_{ii} \cdot \dots \cdot A_{nn}\right) \\ &= F(A) + c \cdot F(\tilde{A}) \end{aligned}$$

vi) Es gilt

$$\begin{aligned} F(B) &= A_{11} + \dots + \left(A_{ii} + c\tilde{A}_{ii}\right) + \dots + A_{nn} \\ &\neq (A_{11} + \dots + A_{ii} + \dots + A_{nn}) + c \cdot \left(A_{11} + \dots + \tilde{A}_{ii} + \dots A_{nn}\right) \\ &= F(A) + c \cdot F(\tilde{A}) \end{aligned}$$

Frage 23

Sei A eine $n \times n$ Matrix und sei B entstanden aus A durch vertauschen der i. und j. Zeile (o.B.d.A. $j > i$). Wie viel mal müsste man benachbarte Zeilen vertauschen, um von A zu B zu gelangen?

- ◯ $2(j-i)$
- ◯ $j-i$
- √ ◯ $2(j-i)-1$
- ◯ $2(j-i)+1$

Vertauscht man die Zeile $A_{(i)}$ mit seinen Nachbarn unten bis sie unter der Zeile $A_{(j)}$ steht, so muss man $j-i$ mal vertauschen. Vertauscht man nun die Zeile $A_{(j)}$ mit seinen Nachbarn oben bis sie oberhalb von $A_{(i+1)}$ steht, so muss man $j-i-1$ mal vertauschen und somit das Resultat.

Frage 24

Eine Determinante ist ein Element von $\mathrm{Hom}(M_{n\times n}(\mathbb{K}), \mathbb{K})$

- ◯ richtig
- √ ◯ falsch

Die Determinante ist eine multilineare Abbildung, d.h. u.A. dass $\delta(cA) = c^n\delta(A)$ und damit ist die Abbildung nicht linear (ausser für $n = 1$).

Frage 25

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ◯ Sei B entstanden aus A durch vertauschen von zwei Spalten, so gilt $\det(A) = \det(B)$
- ◯ Sei B entstanden aus A durch multiplizieren einer Spalte mit einem Faktor c, so gilt $\det(A) = \det(B)$
- √ ◯ Sei B entstanden aus A durch addieren eines Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile, so gilt $\det(A) = \det(B)$
- ◯ $\det(I_n) = 0$
- √ ◯ Wenn zwei Spalten von A gleich sind, so gilt $\det(A) = 0$
- √ ◯ Die Determinante einer unteren Dreiecksmatrix ist das Produkt der Einträgen auf der Diagonale
- ◯ $\det(A^T) = -\det(A)$
- √ ◯ $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- √ ◯ A ist invertierbar genau dann wenn $\det(A) \neq 0$

Folgt alles direkt aus der Vorlesung (Definitionen und Sätzen).