Serie 2: Abbildungen, Relationen & Mächtigkeit

1. Auf $\mathbb{Z}$ definieren wir eine Relation $\equiv$ durch

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : (x \equiv y :\Leftrightarrow x - y \text{ ist gerade})$$

a) Zeigen Sie, dass $\equiv$ eine Äquivalenzrelation definiert. Bestimmen Sie die Menge der Restklassen.

b) Ersetzen Sie in der Definition von $\equiv$ das Wort "gerade" durch "ungerade". Welche Eigenschaften einer Äquivalenzrelation werden erfüllt, welche nicht?

c) Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq 2$ sei $\sim_n$ die Relation

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : (x \sim_n y :\Leftrightarrow n \text{ teilt } x - y)$$

Wenn $x \sim_n y$, dann sagen wir auch x und y sind äquivalent modulo n und schreiben $x \equiv y \mod n$. Zeigen Sie, dass $\sim_n$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert.

d) Bestimmen Sie die Menge der Restklassen $\mathbb{Z}/\sim_n$.

Bemerkung: Die Menge $\mathbb{Z}/\sim_n$ wird häufig auch $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ geschrieben und ist – wie wir noch besprechen werden – ein Ring, nämlich der Restklassenring $\mathrm{mod} n$.

2. Sei X eine Menge und seien P, Q Teilmengen von X. Beweisen Sie die folgenden Identitäten.

a) $\chi_{P\cap Q} = \min\{\chi_P, \chi_Q\} = \chi_P \cdot \chi_Q$.

b) $\chi_{P\cup Q} = \max\{\chi_P, \chi_Q\} = \chi_P + \chi_Q - \chi_{P\cap Q}$.

c) $\chi_{P\setminus Q} = \chi_P - \chi_P \cdot \chi_Q$.

Bitte wenden!

d) $\chi_{P^c} = 1 - \chi_P$.

e) $\chi_{P \Delta Q} = (\chi_P - \chi_Q)^2$.

$^\heartsuit$**3.** Seien X, Y, Z nicht-leere Mengen.

a) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ injektiv. Zeigen Sie, dass $g \circ f$ injektiv ist.

b) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ surjektiv. Zeigen Sie, dass $g \circ f$ surjektiv ist.

c) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ bijektiv. Zeigen Sie, dass $g \circ f$ bijektiv ist.

d) Sei $f : X \to Y$ injektiv. Zeigen Sie, dass f eine Linksinverse besitzt: Es existiert eine Abbildung $g : Y \to X$, sodass $g \circ f = \mathrm{id}_X$ ist.

e) Sei $f : X \to Y$ surjektiv. Zeigen Sie, dass f eine Rechtsinverse besitzt: Es existiert eine Abbildung $g : Y \to X$, sodass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ ist.

4. Im Folgenden betrachten wir die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{N}_0^2$ gegeben durch

$$(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2) \iff m_1 + n_2 = n_1 + m_2$$

zusammen mit den Abbildungen $\imath_+, \imath_- : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0^2/\sim$, $\imath_+(n) = [(n, 0)]$ und $\imath_-(n) = [(0, n)]$.

a) Zeigen Sie, dass $\imath_+$ und $\imath_-$ injektiv sind.

b) Zeigen Sie, dass $\imath_+(\mathbb{N}_0) \cap \imath_-(\mathbb{N}) = \{\}$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}_0^2/\sim = \imath_+(\mathbb{N}_0) \cup \imath_-(\mathbb{N})$ ist.

5. Online-Abgabe

Siehe nächstes Blatt!

1. Seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung, $A_1, A_2 \subset X$ und $B_1, B_2 \subset Y$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

(b) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

(c) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

(d) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

(e) $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$

(f) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

2. Welche der folgenden Aussagen über die Mächtigkeiten von Mengen sind richtig?

(a) $\mathbb{N}$ und die Menge der geraden Zahlen sind gleichmächtig.

(b) $\mathbb{N}$ und die Menge der Primzahlen sind gleichmächtig.

(c) $\{0, 1\}^5$ und $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ sind gleichmächtig.

(d) $\{0, 1\}^2$ und $\{a, b\}$ sind gleichmächtig.

(e) $\{0, 1\}^3$ und $\{1, 2, \ldots, 8\}$ sind gleichmächtig.

Bitte wenden!

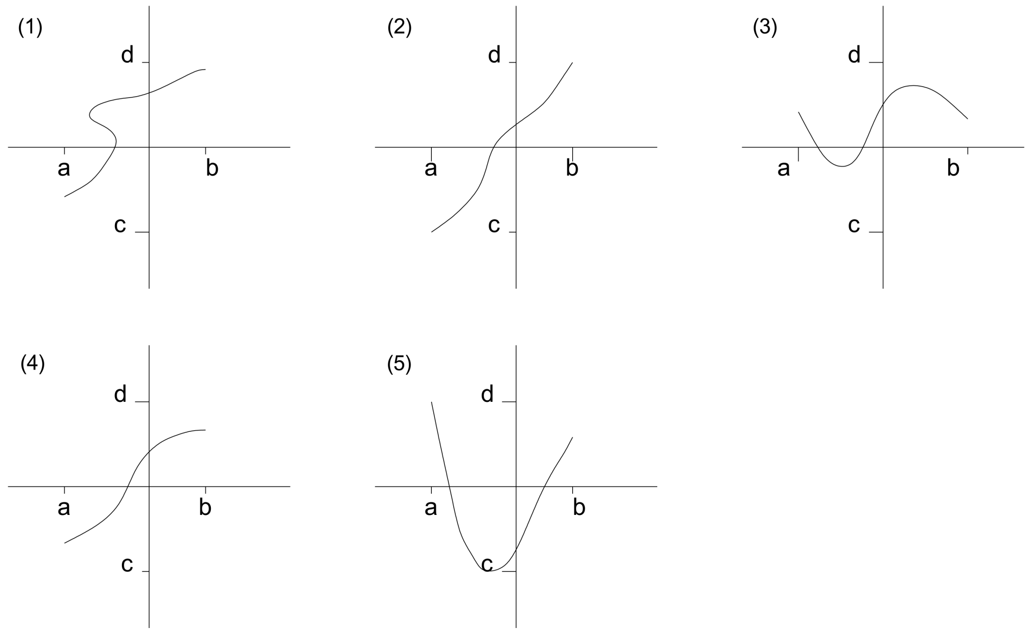

Abbildung 1: Bilder zu MC-Aufgabe 3.

3. Welche der Bilder in Abbildung 1 sind Graphen einer injektiven bzw. surjektiven Funktion $f : [a, b] \to [c, d]$?

(a) 1 ist injektiv

(b) 2 ist injektiv

(c) 3 ist injektiv

(d) 4 ist injektiv

(e) 5 ist injektiv

(f) 1 ist surjektiv

(g) 2 ist surjektiv

(h) 3 ist surjektiv

(i) 4 ist surjektiv

(j) 5 ist surjektiv

Siehe nächstes Blatt!

4. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ist injektiv.

(b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ist surjektiv.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Donnerstag, den 5. Oktober 11:00 Uhr vormittags im HG J 68.