Lösung 4: Vektorräume, Unterräume, Linearkombinationen und Erzeugendensysteme

1. **a)** Wir wissen, dass $\mathbb{R}[x]$ ein Ring ist, und somit ist $(\mathbb{R}[x], +, 0)$ eine abelsche Gruppe. Wir definieren eine skalare Multiplikation $\mathbb{R} \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ mittels Komposition der Einbettung $\mathbb{R} \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x]$, die ein Element in der ersten Komponente auf das konstante Polynom schickt und in der zweiten Komponente die Identität auf $\mathbb{R}[x]$ ist, sowie der skalaren Multiplikation:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}[x] & \hookrightarrow & \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ & & & & \\ (c, p(x)) & \longmapsto & (c, p(x)) & \longmapsto & c \cdot p. \end{array}$$

Da $\mathbb{R}[x]$ ein Ring und $1_{\mathbb{R}[x]}$ das konstante Polynom mit Wert 1 ist, erfüllt $\mathbb{R}[x]$ versehen mit der Restriktion der Multiplikation auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}[x]$ die Vektorraumaxiome.

b) Falls $d < 0$, dann ist $\mathbb{R}_0[x] = \{0\}$ und $\mathbb{R}_{=d}[x] = \{\}$, der erste also ein Vektorraum, der zweite nicht. Es gilt in diesem Fall $\mathbb{R}_{=d}[x] \subset \mathbb{R}_d[x]$, und da jeder Unterraum von $\mathbb{R}[x]$ das Nullelement enthält, ist $\mathbb{R}_d[x]$ der kleinste Unterraum, der $\mathbb{R}_d[x]$ entält. Sei nun $d \geq 0$. Aus der Formel für Koeffizienten von $p + q$ in Teilaufgabe (a) folgt, dass $\deg(p + q) \leq \max\{\deg(p), \deg(q)\}$ und folglich ist $p + q \in \mathbb{R}_d[x]$, falls $p, q \in \mathbb{R}_d[x]$. Aus der Konstruktion der skalaren Multiplikation auf $\mathbb{R}[x]$ folgt, dass

$$\deg(c \cdot p) = \begin{cases} \deg(p) & \text{falls } c \neq 0 \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Folglich ist $\mathbb{R}_{=d}[x]$ kein Vektorraum, da die skalare Multiplikation nicht wohldefiniert ist ($0 \cdot p \notin \mathbb{R}_{=d}[x]$ für alle $p \in \mathbb{R}_{=d}[x]$). Andererseits ist $\mathbb{R}_d[x]$ ein Vektorraum. Vektorraumaxiom VR3 ist erfüllt, da $\deg(0_R) = -\infty < d$ und in der vorangehenden Serie haben wir gesehen, dass $\deg(-p) = \deg(p)$, also gilt auch Vektorraumaxiom VR4. Die restlichen Axiome gelten, da $\mathbb{R}[x]$ ein Vektorraum ist. Insbesondere ist also $\mathbb{R}_d[x]$ der kleinste Unterraum, der $\mathbb{R}_d[x]$ enthält.

Wir zeigen nun, dass $\langle \mathbb{R}_{=d}[x] \rangle = \mathbb{R}_d[x]$ gilt. Im Allgemeinen gilt $\mathbb{R}_{=d}[x] \subset \mathbb{R}_d[x]$ und somit sicherlich $\langle \mathbb{R}_{=d}[x] \rangle \subset \mathbb{R}_d[x]$, denn wie oben gezeigt wurde, ist $\mathbb{R}_d[x]$ ein Unterraum von $\mathbb{R}[x]$.

"$d < 0$": Für $d < 0$ haben wir die Aussage bereits zu Beginn bewiesen.

"$d = 0$": Falls $d = 0$ ist, dann ist $1 \in \mathbb{R}_{=d}[x]$ und somit $0 = 1 - 1 \in \langle \mathbb{R}_{=d}[x] \rangle$. Da alle Polynome von Grad 0 in $\mathbb{R}_{=d}[x]$ enthalten sind, da 0 das einzige Polynom mit Grad kleiner 0 ist, folgt $\mathbb{R}_d[x] = \langle \mathbb{R}_{=d}[x] \rangle$.

"$d > 0$": Sei $p \in \mathbb{R}[x]$ mit $\deg(g) \leq d$. Falls $\deg(p) = d$ ist, dann ist $p \in \mathbb{R}_{=d}[x] \subset \langle \mathbb{R}_{=d}[x] \rangle$. Sei also $\deg(p) < d$, dann ist $\deg(x^d + p) = d$ und folglich $q = x^d + p \in \mathbb{R}_{=d}[x]$. Insbesondere ist $q - x^d = p \in \langle \mathbb{R}_{=d}[x] \rangle$. Dies zeigt, dass $\mathbb{R}_{d-1}[x] \subset \langle \mathbb{R}_{=d}[x] \rangle$. Da $\mathbb{R}_d[x] = \mathbb{R}_{d-1}[x] \cup \mathbb{R}_{=d}[x]$ ist, folgt also $\mathbb{R}_d[x] \subset \langle \mathbb{R}_{=d}[x] \rangle$.

c) Für alle x gilt:

$$\begin{aligned} 2x^3 + 3x^2 - 1 =& 2(x^3 + x^2) + (x^2 - 2x - 4) + (2x + 3) \\ =& 2p_1(x) + p_2(x) + p_4(x) \end{aligned}$$

d) Wir bemerken als erstes, dass $-2p_3(x) + 3p_4(x) = 1$. Des weiteren gilt $3p_3(x) - 4p_4(x) = x$. Es folgt also

$$x^2 = p_2(x) + 2(3p_3(x) - 4p_4(x)) + 4(-2p_3(x) + 3p_4(x))$$

und schliesslich

$$x^3 = p_3(x) - p_2(x) - 2(3p_3(x) - 4p_4(x)) - 4(-2p_3(x) + 3p_4(x))$$

Es folgt $\{1, x, x^2, x^3\} \subset \langle p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x) \rangle$, also $P_3(\mathbb{R}) = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle \subset \langle p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x) \rangle$. Da $\deg p \leq 3$ für alle $p \in \langle p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x) \rangle$ gilt $\langle p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x) \rangle = P_3(\mathbb{R})$.

2. a) Per definitionem ist $(V, +, 0_V)$ eine abelsche Gruppe, und somit sind das neutrale Element sowie die Inversen eindeutig bestimmt.

b) Sei $\lambda \in \mathbb{K}$, dann ist

$$\lambda \cdot 0_V = \lambda \cdot (0_V + 0_V) = \lambda \cdot 0_V + \lambda \cdot 0_V.$$

Unter Verwendung der Kürzungsregel in Gruppen, folgt $0_V = \lambda \cdot 0_V$.

Siehe nächstes Blatt!

3. **a)** **“(i)⇒(ii)”:** Ist W ein Unterraum, so gelten $\lambda \cdot v \in W$, $-v \in W$ sowie $u+v \in W$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und für alle $u, v \in W$. Also

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall u, v \in V : \; u - \lambda \cdot v \in W$$

“(ii)⇐(i)”: Nach Annahme ist $W \neq \{\}$, also $\{v_0\} \subset W$ für ein $v_0 \in V$.

1. Nach Annahme ist $0_V = v_0 - v_0 = v_0 - 1 \cdot v_0 \in W$.
2. Seien $u, v \in W$ beliebig, dann gilt nach Annahme $u + v = u - (-1) \cdot v \in W$.
3. Seien $v \in W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig, dann gilt $\lambda \cdot v = -(-\lambda) \cdot v = 0_V - (-\lambda) \cdot v \in W$, da $0_V \in W$.

b) Angenommen V_α ist ein Unterraum, dann ist $0_{\mathbb{K}^3} = (0, 0, 0) \in V_\alpha$ und folglich $\alpha = 0$. Es bleibt also nur zu zeigen, dass V_0 tatsächlich ein Unterraum ist. Wie eben gezeigt, ist $(0, 0, 0) \in V_0$ und somit ist V_0 nicht-leer. Seien (x_1, x_2, x_3) und (y_1, y_2, y_3) in V_0, sowie $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann gilt

$$(x_1, x_2, x_3) - \lambda \cdot (y_1, y_2, y_3) = (x_1 - \lambda y_1, x_2 - \lambda y_2, x_3 - \lambda y_3)$$

und es ist

$$\sum_{i=1}^{3} (x_i - \lambda y_i) = \sum_{i=1}^{3} x_i - \lambda \sum_{i=1}^{3} y_i = 0,$$

und somit $(x_1, x_2, x_3) - \lambda \cdot (y_1, y_2, y_3) \in V_0$. Aus Teilaufgabe a) folgt, dass V_0 ein Unterraum ist.

4. Da $0 - \lambda 0 = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, folgt aus $A_{ij} = B_{ij} = 0$, dass $A_{ij} - \lambda B_{ij} = 0$ gilt. Zudem erfüllt die Nullmatrix mit Einträgen $A_{ij} = 0$ die Restriktionen aus Teilaufgaben (a) und (b). Beides zusammen zeigt, dass W_1, W_2, W_3, W_4 sowie W_5 Unteräume von V sind.

1 Gegeben $A \in V$, seien $B, C \in V$ definiert durch

$$B_{ij} := \begin{cases} A_{ij} & \text{falls } i \geq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$C_{ij} := \begin{cases} A_{ij} & \text{falls } i < j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann sind $B \in W_1$, $C \in W_2$ und

$$\begin{aligned} i < j : \quad & (B + C)_{ij} = B_{ij} + C_{ij} = C_{ij} = A_{ij} \\ i \geq j : \quad & (B + C)_{ij} = B_{ij} + C_{ij} = B_{ij} = A_{ij} \end{aligned}$$

Folglich ist $V = W_1 + W_2$. Sei $A \in W_1 \cap W_2$, dann ist $A_{ij} = 0$ falls $i < j$, wegen $A \in W_1$ und $A_{ij} = 0$ falls $i \geq j$ wegen $A \in W_2$. Also ist $A_{ij} = 0$ für alle i, j und somit $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$, also $V = W_1 \oplus W_2$.

Bitte wenden!

2 Sei $I \in V$ die Matrix gegeben durch

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $W_4 = \mathbb{R} \cdot I := \{A \in V \mid \exists c \in \mathbb{R} : A = c \cdot I\}$. $0_V = 0 \cdot I \in W_4$ und falls $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ und $u = \alpha \cdot I$, $v = \beta \cdot I$, dann ist

$$u - \lambda \cdot v = \alpha \cdot I - \lambda \cdot \beta I = \alpha \cdot I - \lambda\beta \cdot I = (\alpha - \lambda\beta) \cdot \mathbb{R} \in W_4$$

Also ist W_4 ein Unterraum. Wir schreiben $\operatorname{tr} : V \to \mathbb{R}$ für die Abbildung $\operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^n A_{ii}$.[1] Man beachte, dass $W_3 = \operatorname{tr}^{-1}(\{0\})$. Seien $A, B \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gelten

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A + B) &= \sum_{i=1}^n (A + B)_{ii} = \sum_{i=1}^n (A_{ii} + B_{ii}) \\ &= \sum_{i=1}^n A_{ii} + \sum_{i=1}^n B_{ii} = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) \\ \operatorname{tr}(\lambda \cdot A) &= \sum_{i=1}^n (\lambda \cdot A)_{ij} = \sum_{i=1}^n \lambda A_{ij} = \lambda \operatorname{tr}(A) \end{aligned}$$

Es folgt also $\operatorname{tr}(0_V) = \operatorname{tr}(0_V) + \operatorname{tr}(0_V)$, also $0 = \operatorname{tr}(0_V)$ und folglich $0_V \in W_3$. Seien $A, B \in W_3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt wegen gezeigter Eigenschaften von tr

$$\operatorname{tr}(A - \lambda \cdot B) = \operatorname{tr}(A) - \lambda \operatorname{tr}(B) = 0$$

und folglich ist W_3 ein Unterraum. Sei nun $A \in V$ beliebig, und setze $A_0 := A - \frac{\operatorname{tr}(A)}{n} I$, $A_d := \frac{\operatorname{tr}(A)}{n} I$. Beachte, dass $A_d \in W_4$. Es gilt sicher $A = A_0 + A_d$ und wegen oben gezeigtem

$$\operatorname{tr}(A_0) = \operatorname{tr}\left(A - \frac{\operatorname{tr}(A)}{n} I\right) = \operatorname{tr}(A) - \frac{\operatorname{tr}(A)}{n} \operatorname{tr}(I) = 0$$

Also ist $A_0 \in W_3$ und folglich $V = W_3 + W_4$. Sei $A \in W_3 \cap W_4$. Dann ist $A = \alpha \cdot I$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$, da A in W_4. Wegen $A \in W_3$, ist

$$0 = \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(\alpha \cdot I) = \alpha \operatorname{tr}(I) = \alpha n$$

und folglich $\alpha = 0$. Es folgt $W_3 \cap W_4 = \{0\}$ und also $V = W_3 \oplus W_4$.

[1] Diese Abbildung heisst *trace* (auf Deutsch *Spur*) und ist in der Mathematik von zentraler Bedeutung. Mehr dazu im weiteren Verlauf der Vorlesung.

Siehe nächstes Blatt!

5. **a)** Wir verwenden das Symbol 0_V für die Abbildung gegeben durch $0_V(x) = 0 \in \mathbb{K}$ für alle $x \in \mathbb{K}$ und bemerken, dass $0_V + f = f$ für alle $f \in V$. Folglich ist 0_V das neutrale Element bezüglich Addition. Des Weiteren gilt $0 = -0$ in $\mathbb{K}$ und folglich sind $-0_V(x) = 0 = 0_V(-x)$ sowie $0_V(x) = 0 = 0_V(-x)$ für alle $x \in \mathbb{K}$. Also ist $0_V \in V_1 \cap V_2$. Seien $f_1, g_1 \in V_1$, $f_2, g_2 \in V_2$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gelten

$$\begin{aligned}(f_1 + g_1)(x) =& f_1(x) + g_1(x)\\ =& f_1(-x) + g_1(-x) = (f_1 + g_1)(-x)\\ (\lambda \cdot f_1)(x) =& \lambda f_1(x) = \lambda f_1(-x) = (\lambda \cdot f_1)(-x)\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}-(f_2 + g_2)(x) =& - f_2(x) - g_2(x)\\ =& f_2(-x) + g_2(-x) = (f_2 + g_2)(-x)\\ -(\lambda \cdot f_2)(x) =& - \lambda f_2(x) = \lambda\big(- f_2(x)\big) = (\lambda \cdot f_2)(-x)\end{aligned}$$

Folglich sind V_1, V_2 Unterräume von V.

b) Sei $f \in V$, und seien $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned}f_1(x) :=& \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}\\ f_2(x) :=& \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) + \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big) = f(x)$$

Des Weiteren gelten für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}f_1(-x) =& \frac{1}{2}\big(f(-x) + f(\underbrace{-(-x)}_{=x})\big)\\ =& \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) = f_1(x)\\ f_2(-x) =& \frac{1}{2}\big(f(-x) - f(\underbrace{-(-x)}_{=x})\big)\\ =& -\frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big) = -f_2(x)\end{aligned}$$

Letzteres zeigt, dass $f_1 \in V_1$ und $f_2 \in V_2$. Da $f = f_1 + f_2$ und weil $f \in V$ beliebig war, haben wir also gezeigt, dass $V = V_1 + V_2$. Sei $h \in V_1 \cap V_2$, dann gilt

$$-h(x) \overset{h \in V_2}{=} h(-x) \overset{h \in V_1}{=} h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Bitte wenden!

Wegen $\forall z \in \mathbb{R} : -z = z \Rightarrow z = 0$, folgt $h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und folglich $h = 0_V$. Das zeigt, dass $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$ und somit $V = V_1 \oplus V_2$.

c) Sei $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}_2$ der Körper mit 2 Elementen $\{\bar{0}, \bar{1}\}$. Da $\mathbb{F}_2$ mit Addition eine Gruppe mit zwei Elementen ist, gilt $-\bar{0} = \bar{0}$ und $-\bar{1} = \bar{1}$ (vgl. Aufgabe 4 von Serie 2 oder Aufgabe 1 von Serie 3), also $x = -x$ für alle $x \in \mathbb{F}_2$. Also ist $\mathrm{id}_{\mathbb{F}_2} \in V_1 \cap V_2$ und somit $V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$.