Serie 4:
Vektorräume, Unterräume, Linearkombinationen und Erzeugendensysteme

1. Sei $\mathbb{R}[x]$ der Ring der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$.

a) Definieren Sie eine skalare Multiplikation $\mathbb{R} \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ durch punktweise Multiplikation, i.e. für $c \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{R}[x]$ sei $c \cdot p$ definiert als die Abbildung f mit der Eigenschaft $f(x) = cp(x)$ für alle x. Zeigen Sie, dass diese skalare Multiplikation wohldefiniert und dass $\mathbb{R}[x]$ mit dieser skalaren Multiplikation ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.

b) Sei $d \in \mathbb{Z}$ und seien

$$\mathbb{R}_d[x] := \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \leq d\}$$
$$\mathbb{R}_{=d}[x] := \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) = d\}$$

Bestimmen Sie die minimalen Unterräume von $\mathbb{R}[x]$, die $\mathbb{R}_d[x]$ bzw. $\mathbb{R}_{=d}[x]$ enthalten.

c) Gegeben sind die vier Polynome

$$\begin{aligned} p_1(x) =& x^3 + x^2 \\ p_2(x) =& x^2 - 2x - 4 \\ p_3(x) =& 3x + 4 \\ p_4(x) =& 2x + 3 \end{aligned}$$

1. Man schreibe das Polynom $2x^3+3x^2-1$ als Linearkombination der Polynome p_1, p_2, p_3, p_4.
2. Berechnen Sie das Erzeugnis $\langle p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle$.

Bitte wenden!

$^\heartsuit$**2.** Sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

a) Sei $w \in V$. Beweisen Sie, dass das Element $v \in V$ mit der Eigenschaft

$$w + v = 0_V$$

eindeutig ist. *Bemerkung:* Man schreibt $-w$ für dieses durch w eindeutig bestimmte $v \in V$.

b) Beweisen Sie, dass $\lambda \cdot 0_V = 0_V$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt.

3. Im Folgenden sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

$^\heartsuit$**a)** Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und sei $W \subset V$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass folgende äquivalent sind:

(i) W ist ein Unterraum von V.
(ii) $W \neq \{\}$ und für alle $u, v \in W$ und für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $u - \lambda v \in W$.

b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{K}$, sodass

$$V_\alpha := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = \alpha\} \subset \mathbb{K}^3$$

ein Unterraum ist.

4. Sei $V := \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ die Menge der $m \times n$-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$, versehen mit Addition und skalarer Multiplikation wie in der Vorlesung definiert. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Seien $W_1, W_2 \subset V$ gegeben als

$$\begin{aligned} W_1 :=& \{A \in V \mid i < j \Rightarrow A_{ij} = 0\} \\ W_2 :=& \{A \in V \mid i \geq j \Rightarrow A_{ij} = 0\} \end{aligned}$$

Dann sind W_1, W_2 Unterräume von V und $V = W_1 \oplus W_2$, d.h. V ist die Summe der *oberen* und *strikt unteren Dreiecksmatrizen*.

2. Seien $m = n$ und

$$\begin{aligned} W_3 :=& \{A \in V \mid A_{11} + \cdots A_{nn} = 0\} \\ W_4 :=& \{A \in V \mid (i \neq j \Rightarrow A_{ij} = 0) \wedge (\exists c \in \mathbb{R}\, \forall i : A_{ii} = c)\} \end{aligned}$$

Dann sind W_3, W_4 Unterräume und $V = W_3 \oplus W_4$.

Siehe nächstes Blatt!

5. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei V der $\mathbb{K}$-Vektorraum aller Abbildungen $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Seien

$$\begin{aligned} V_1 &:= \{f \in V \mid \forall x \in \mathbb{K} : f(-x) = f(x)\} && \text{(gerade Funktionen)} \\ V_2 &:= \{f \in V \mid \forall x \in \mathbb{K} : f(-x) = -f(x)\} && \text{(ungerade Funktionen)} \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $V_1, V_2 \subset V$ Unterräume sind.

b) Nehmen Sie an, dass $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass $V = V_1 \oplus V_2$. *Hinweis:* gegeben $f \in V$, betrachten Sie $\tilde{f}(x) := \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big)$.

c) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen $V \neq V_1 \oplus V_2$.

6. Online-Abgabe

1. In jedem Vektorraum V gilt $av = bv \implies a = b$ für $a, b \in K, v \in V$

(a) richtig

(b) falsch

2. In jedem Vektorraum V gilt $av = aw \implies v = w$ für $a \in K, v, w \in V$

(a) richtig

(b) falsch

3. Versehen Sie $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit folgender Addition “$+$” und skalarer Multiplikation “$\cdot$”:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) + (b_1, b_2) &:= (a_1 + b_1, a_2 b_2) \\ c \cdot (a_1, a_2) &:= (ca_1, a_2) \end{aligned}$$

für alle $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und für alle $c \in \mathbb{R}$. Mit diesen Verknüpfungen ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

(a) Wahr

(b) Falsch

Bitte wenden!

4. Sei K ein Körper und versehen Sie $K \times K$ mit komponentenweiser Addition und einer skalaren Multiplikation "$\cdot$":

$$c \cdot (a_1, a_2) := (a_1, 0)$$

für alle $(a_1, a_2) \in K \times K$ und für alle $c \in K$. Mit diesen Verknüpfungen ist $K \times K$ ein Vektorraum über K.

(a) Wahr

(b) Falsch

5. Sei K ein beliebiger Körper. Definiere auf $K \times K$ eine Addition durch komponentenweise Addition und eine skalare Multiplikation

$$\forall (a_1, a_2) \in K \times K \forall c \in K : c \cdot (a_1, a_2) := \begin{cases} (0,0) & \text{falls } c = 0 \\ (ca_1, c^{-1}a_2) & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit diesen Verknüpfungen ist $K \times K$ ein Vektorraum über K.

(a) Wahr

(b) Falsch

6. *(Optional)* Welche der folgenden Teilmengen $W \subset V$ sind Unterräume?

(a) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \{v \in V \mid \exists x \in \mathbb{R} : v = (0, x, 2x, 3x)\}$

(b) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \{v \in V \mid \exists x \in \mathbb{R} : v = (x, x^2, x^3, x^4)\}$

(c) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \{v \in V \mid \exists x, y \in \mathbb{R} : x > y \wedge v = (x, y, 0, 0)\}$

(d) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper,

$$V = \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{K}).$$

und

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid ad - bc \neq 0 \right\}$$

(e) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper,

$$V = \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{K}).$$

und

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a = d \right\}$$

(f) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper,

$$V = \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{K}).$$

und

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix} \in V \right\}$$

7. Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $\{\} \subset V$ ist ein Unterraum.

(b) V enthält einen Unterraum $W \subset V$ mit $W \neq V$.

(c) Keine der Aussagen ist richtig.

Bitte wenden!

8. *(Optional)* Sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Zahlenfolgen versehen mit der Addition

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

und der skalaren Multiplikation

$$\lambda \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $W := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n = 0\}$ ist ein Unterraum.

(b) $W := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n = 1\}$ ist ein Unterraum.

(c) $W := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid 2 \mid n \Rightarrow a_n = 0\}$ ist ein Unterraum.

(d) Keine der Aussagen ist wahr.

9. Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und seien U_1, U_2 Unterräume. Welche der folgenden Teilmengen von V sind Unterräume?

(a) $U_1 \cap U_2$

(b) $U_1 \cup U_2$

(c) $U_1 \setminus U_2$

(d) $\{0_V\}$

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Donnerstag, den 19. Oktober 10:00 Uhr vormittags im Raum HG J 68, in einem der Fächer beschriftet mit *Abgabe*.