Lösung 5:
Lineare (Un-)Abhängigkeit, Basis & Dimension

1. 1. Angenommen A_1, A_2 sind linear abhängig. Dann existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ nicht alle 0, so dass

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} &= \alpha\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\alpha & 2\alpha+\beta & 3\alpha\\ 0 & 0 & \alpha+\beta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Also gilt $\alpha = \beta = 0$ und folglich sind A_1, A_2 linear unabhängig.

2. Aus der Rechnung in Teil 1 folgt, dass $\langle A_1, A_2\rangle \subset M$. Wir müssen also nur zeigen, dass $M \subset \langle A_1, A_2\rangle$, d.h. dass jede Matrix $B \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ der Form $\left(\begin{smallmatrix}a&b&c\\0&0&f\end{smallmatrix}\right)$ mit $b - a = f$ und $3a = c$ in $\langle A_1, A_2\rangle$ enthalten ist. Wir zeigen $B = aA_1 + (f-a)A_2$:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a&b&c\\0&0&f\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}a&a+f&3a\\0&0&f\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}a&2a&3a\\0&0&a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&f-a&0\\0&0&f-a\end{pmatrix}\\ &= aA_1 + (f-a)A_2\end{aligned}$$

3. Sei $A_3 = \left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{smallmatrix}\right)$. Angenommen $\{A_1, A_2, A_3\}$ wäre linear abhängig. Dann gäbe es α, β, γ nicht alle null, so dass

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & 2\alpha+\beta & 3\alpha\\ \gamma & 0 & \alpha+\beta\end{pmatrix}$$

und folglich $\alpha, \beta, \gamma = 0$. Das ist ein Widerspruch, und folglich ist $\{A_1, A_2, A_3\}$ linear unabhängig. Sei $B = \left(\begin{smallmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{smallmatrix}\right) \in \langle A_1, A_2, A_3\rangle$, dann zeigt obige Rechnung, dass $e = 0$. Also ist $\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{smallmatrix}\right) \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \setminus \langle A_1, A_2, A_3\rangle$ und folglich $M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \neq \langle A_1, A_2, A_3\rangle$.

Bitte wenden!

2. Im Folgenden sei $N_f \in \mathbb{N}_0$ für $f \in \mathbb{K}[X]$ gegeben durch

$$N_f = \min\{N \in \mathbb{N}_0 \mid \forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N \implies f(n) = 0\}.$$

a) Es sei $\mathbf{0}$ die Nullfunktion, d.h. $\mathbf{0}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist sicherlich $\mathbf{0} \in \mathbb{K}[X]$ und somit ist $\mathbb{K}[X]$ nicht-leer. Seien $f, g \in \mathbb{K}[X]$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann ist $f - \lambda \cdot g \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ gegeben durch

$$(f - \lambda \cdot g)(n) = f(n) - \lambda g(n) \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq \max\{N_f, N_g\} = N$ gilt $f(n) = g(n) = 0$. Somit folgt für alle $n \geq N$, dass

$$(f - \lambda \cdot g)(n) = f(n) - \lambda g(n) = 0$$

und folglich ist $f - \lambda \cdot g$ eine Funktion, die schliesslich verschwindet. Da $f, g \in \mathbb{K}[X]$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig waren, ist somit $\mathbb{K}[X]$ ein Unterraum.

b) Seien $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{K}[X]$ beliebig, und sei $N = \max\{N_{f_k} \mid 1 \leq k \leq m\}$. Sei $f \in \langle\{f_1, \dots, f_m\}\rangle$, dann existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$, sodass

$$f = \lambda_1 \cdot f_1 + \cdots + \lambda_m \cdot f_m$$

ist. Somit ist für $n \geq N$

$$f(n) = \lambda_1 f_1(n) + \lambda_m f_m(n) = 0.$$

Insbesondere ist die Funktion X^N nicht in $\langle\{f_1, \dots, f_m\rangle$ enthalten und insbesondere ist $\{f_1, \dots, f_m\}$ kein Erzeugendensystem von $\mathbb{K}[X]$. Da $\{f_1, \dots, f_m\}$ eine beliebige endliche Teilmenge war, besitzt $\mathbb{K}[X]$ kein endliches Erzeugendensystem.

c) Seien $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}_0$ paarweise verschieden und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ mit

$$\lambda_1 \cdot X^{n_1} + \cdots + \lambda_m \cdot X^{n_m} = \mathbf{0},$$

dann gilt für $1 \leq i \leq m$, dass

$$0 = \lambda_1 X^{n_1}(n_i) + \cdots + \lambda_m X^{n_m}(n_i) = \lambda_i X^{n_i}(n_i) = \lambda_i$$

und somit ist $\lambda_i = 0$. Da $1 \leq i \leq m$ beliebig war, sind somit alle Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ gleich 0 und somit ist die Menge $\{X^{n_1}, \dots, X^{n_m}\}$ linear unabhängig. Da $n_1, \dots, n_m$ in $\mathbb{N}_0$ beliebig waren, folgt die Behauptung.

Sei nun $f \in \mathbb{K}[X]$ beliebig. Falls $N_f = 0$ ist, dann ist $f = \mathbf{0}$ und somit sicherlich im Erzeugnis von $S = \{X^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ enthalten, da das Erzeugnis per definitionem ein Unterraum ist. Sei also $N_f \geq 1$. Definiere eine Funktion $g \in \mathbb{K}[X]$ durch

$$g = \sum_{k=0}^{N_f - 1} f(k) \cdot X^k \in \langle S \rangle,$$

Siehe nächstes Blatt!

dann ist $g(n) = 0 = f(n)$ für alle $n \geq N_f$, und für $n < N_f$ gilt

$$g(n) = \sum_{k=0}^{N_f-1} f(k)X^k(n) = f(n)$$

und somit ist $g = f$. Da $f \in \mathbb{K}[X]$ beliebig war und da $S \subseteq \mathbb{K}[X]$ gilt, folgt $\langle S \rangle = \mathbb{K}[X]$.

d) Um zu zeigen, dass die Verknüpfung wohldefiniert ist, müssen wir zeigen, dass für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ die Menge der Tupel $(l, m) \in \mathbb{N}_0^2$ mit $l + m = k$ endlich ist. Sei $k \in \mathbb{N}_0$, dann gilt für alle $(l, m) \in \mathbb{N}_0^2$ mit $\min\{l, m\} > k$, dass $l + m > k$ ist, und somit ist

$$\{(l, m) \in \mathbb{N}_0^2 \mid l + m = k\} \subseteq \{0, \dots, k\}^2$$

eine endliche Menge und insbesondere die Summe

$$(f * g)(k) = \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0^2 \\ l+m=k}} f(l)g(m)$$

eine endliche Summe und damit wohldefiniert.

Wir zeigen, dass $f * g$ schliesslich verschwindet. Sei $n \geq N_f + N_g - 1$, dann ist

$$(f * g)(n) = \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0^2 \\ l+m=n}} f(l)g(m) = \sum_{l=0}^{N_f-1} f(l)g(n-l) = 0,$$

da $f(l)$ für $l \geq N_f$ verschwindet und da $n - l \geq N_f + N_g - l \geq N_g$ und somit $g(n - l) = 0$ ist für alle $0 \leq l < N_f$. Insbesondere ist also $f * g \in \mathbb{K}[X]$.

Schliesslich zeigen wir die Verträglichkeit mit der Vektorraumstruktur in zwei Schritten. Für die Additivität berechnen wir für $f, g_1, g_2 \in \mathbb{K}[X]$ und beliebige $n \in \mathbb{N}_0$, dass

$$\begin{aligned}
\big(f * (g_1 + g_2)\big)(n) &= \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0^2 \\ l+m=n}} f(l)(g_1 + g_2)(m) \\
&= \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0^2 \\ l+m=n}} f(l)\big(g_1(m) + g_2(m)\big) \\
&= \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0^2 \\ l+m=n}} f(l)g_1(m) + \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0^2 \\ l+m=n}} f(l)g_2(m) \\
&= (f * g_1)(n) + (f * g_2)(n)
\end{aligned}$$

und somit ist $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$.

Für die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation seien $\lambda \in \mathbb{K}$ und $f, g \in \mathbb{K}[X]$. Für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$ gilt dann

$$\begin{aligned}\big(f * (\lambda \cdot g)\big)(n) &= \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0^2\\ l+m=n}} f(l)(\lambda \cdot g)(m) = \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0^2\\ l+m=n}} f(l)\lambda g(m)\\ &= \lambda \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0^2\\ l+m=n}} f(l)g(m) = \lambda(f \cdot g)(n)\end{aligned}$$

und somit folgt $f * (\lambda \cdot g) = \lambda \cdot (f * g)$.

Beides zusammen impliziert

$$f * (g_1 + \lambda \cdot g_2) = f * g_1 + f * (\lambda \cdot g_2) = f * g_1 + \lambda \cdot (f * g_2).$$

e) Wir berechnen

$$(X^k * X^l)(n) = \sum_{\substack{(s,t)\in\mathbb{N}_0^2\\ s+t=n}} X^k(s)X^l(t) = \sum_{\substack{(s,t)\in\mathbb{N}_0^2\\ s+t=n}} \delta_{ks}\delta_{tl} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k+l=n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und somit gilt $X^k * X^l = X^{k+l}$ punktweise.

f) Da $\mathbb{K}[X]$ ein Unterraum von $\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ ist, ist $(\mathbb{K}[X], +, \mathbf{0})$ eine abelsche Gruppe. Wir zeigen als nächstes die Assoziativität und die Kommutativität der Multiplikation sowie die Distributivität der Multiplikation bezüglich Addition.

Wir beginnen mit der Kommutativität. Seien $f, g \in \mathbb{K}[X]$ und $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig, dann ist

$$\begin{aligned}(g * f)(n) &= \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0^2\\ l+m=n}} g(l)f(m) = \sum_{\substack{(m,l)\in\mathbb{N}_0^2\\ m+l=n}} g(m)f(l)\\ &= \sum_{\substack{(m,l)\in\mathbb{N}_0^2\\ m+l=n}} f(l)g(m) = \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0^2\\ l+m=n}} f(l)g(m)\\ &= (f * g)(n)\end{aligned}$$

und somit gilt $g * f = f * g$.

Zum Beweis der Assoziativität seien $f, g, h \in \mathbb{K}[X]$ und sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned}(f*(g*h))(n) &= \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0^2\\ l+m=n}} f(l)(g*h)(m) = \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0^2\\ l+m=n}} \sum_{\substack{(r,s)\in\mathbb{N}_0^2\\ r+s=m}} f(l)g(r)h(s)\\ &= \sum_{\substack{(l,r,s)\in\mathbb{N}_0^3\\ l+r+s=n}} f(l)g(r)h(s) = \sum_{\substack{(m,s)\in\mathbb{N}_0^2\\ m+s=n}} \sum_{\substack{(l,r)\in\mathbb{N}_0^2\\ l+r=m}} f(l)g(r)h(s)\\ &= \sum_{\substack{(m,s)\in\mathbb{N}_0^2\\ m+s=n}} (f*g)(m)h(s) = \big((f*g)*h\big)(n)\end{aligned}$$

und also ist $f*(g*h) = (f*g)*h$.

Wir bemerken, dass die Distributivität von links bereits in Teilaufgabe d) gezeigt wurde. Distributivität von rechts folgt aus der Kommutativität der Verknüpfung.

Aus der Definition von $\mathbf{0}$ sowie der Verknüpfung $*$ folgt sofort, dass $X^0 * \mathbf{0} = \mathbf{0}$ gilt. Wir wissen zudem, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $X^0 * X^k = X^k$, und somit folgt aus der Distributivität sowie dem eben gezeigten, dass für $f = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot X^k \in \mathbb{K}[X]$ gilt

$$X^0 * f = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot (X^0 * X^k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot X^k = f$$

und somit ist X^0 eine eins für $*$.

3. **a)** Es ist $\tilde{\mathbf{0}}(x) = 0$ eine Polynomfunktion, wobei wir alle Koeffizienten gleich 0 wählen. Somit ist $\tilde{\mathbf{0}} \in V$. Um zu zeigen, dass V ein Unterraum ist, müssen wir zeigen, dass für je zwei Polynomfunktionen $f, g \in V$ und für $\lambda \in \mathbb{F}_3$ auch $f-\lambda g$ wieder eine Polynomfunktion ist. Seien $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{F}_3$, sodass $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ und $g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ gilt.

Es folgt aus den Körperaxiomen, dass für beliebige $x \in \mathbb{F}_3$ gilt

$$\begin{aligned}(f-\lambda\cdot g)(x) &= \sum_{k=0}^n a_k x^k - \lambda \sum_{k=0}^n b_k x^k\\ &= \sum_{k=0}^n a_k x^k + \sum_{k=0}^n (-\lambda b_k) x^k\\ &= \sum_{k=0}^n (a_k + (-\lambda b_k)) x^k\\ &= \sum_{k=0}^n (a_k - \lambda b_k) x^k\end{aligned}$$

und somit ist $f - \lambda \cdot g$ eine Polynomfunktion, insbesondere also in V. Somit ist V ein Unterraum von ${\mathbb{F}_3}^{\mathbb{F}_3}$.

Bitte wenden!

b) Man beachte $|V| \leq |\mathbb{F}_3{}^{\mathbb{F}_3}| = 3^3 = 27$ und somit ist beispielsweise V ein endliches Erzeugendenstystem (nämlich V). Um explizit eines anzugeben, bemerken wir, dass die Abbildungen $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ein Erzeugendensystem bilden, da sich jede Polynomfunktion per definitionem als Linearkombination dieser Abbildungen schreiben lässt. Sei $n \geq 1$, dann ist $0^n = 0$ und $1^n = 1 \pmod 3$. Wir behaupten, dass

$$2^n \bmod 3 = \begin{cases} 1 & \text{falls } 2 \mid n \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt, was insbesondere impliziert, dass die Abbildungen $x \mapsto x^{2k}$, $k \geq 1$, alle mit $x \mapsto x^2$ und analog $x \mapsto x^{2k+1}$, $k \geq 1$, alle mit $x \mapsto x$ übereinstimmen. Insbesondere ist also

$$\{x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2\}$$

ein Erzeugendensystem von V.

Die Behauptung gilt, falls $n = 1$ oder $n = 2$ ist. Sei also $n > 2$ und die Behauptung für alle alle $1 \leq m < n$ bereits bewiesen. Dann ist

$$2^n \bmod 3 = 2^{n-2}2^2 \bmod 3 = (2^{n-2} \bmod 3)(2^2 \bmod 3) = 2^{n-2} \bmod 3$$

und somit folgt die Behauptung per Induktion.

Bemerkung: Sie werden in Kürze verstehen, dass jede Abbildung $\mathbb{F}_3 \to \mathbb{F}_3$ eine Polynomfunktion ist.

4. Wir schreiben 2 für das Element $2 \cdot 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ und wir schreiben $\frac{1}{2}$ für $2^{-1} \in \mathbb{K}$.[1]

1. **"⇒":** Angenommen $\{u, v\}$ sind linear unabhängig und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ mit $0_V = \alpha(u + v) + \beta(u - v)$, dann gilt

$$0_V = \alpha(u + v) + \beta(u - v) = (\alpha + \beta)u + (\alpha - \beta)v$$

Also $0 = \alpha + \beta = \alpha - \beta$, also

$$1 \cdot \beta = \beta = -\beta = (-1) \cdot \beta$$

und wenn $\beta \neq 0$, dann impliziert die Kürzungsregel, dass $1 = -1$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $\beta = 0$ und folglich auch $\alpha = 0$. Dies zeigt, dass $\{u + v, u - v\}$ linear unabhängig ist, wie gewünscht.

[1] Man beachte also, dass $2 \in \mathbb{K}$ und somit nicht in $\mathbb{Z}$. Wir verwenden also dasselbe Symbol für zwei eigentlich verschiedene Elemente.

“⇐”: Angenommen $\{u+v, u-v\}$ sind linear unabhängig aund $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ so dass

$$0_V = \alpha u + \beta v$$

Setze

$$\begin{aligned} \alpha' :=& \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \\ \beta' :=& \frac{1}{2}(\alpha-\beta) \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha'(u+v) + \beta'(u-v) =& (\alpha'+\beta')u + (\alpha'-\beta')v \\ =& \frac{1}{2}2\alpha u + \frac{1}{2}2\beta v = \alpha u + \beta v \end{aligned}$$

Also ist $0 = \alpha' = \beta'$. Daraus folgt $0 = \alpha' + \beta' = \alpha$ und $0 = \alpha' - \beta' = \beta$, und folglich ist $\{u, v\}$ linear unabhängig.

Bemerkung: In $\mathbb{F}_2$ is $2 = 0$, somit ist 2 nicht invertierbar und wir können α' nicht wie oben definieren. Man sieht aber sofort, dass die Aussage falsch ist, denn in $\mathbb{F}_2$ ist $1 = -1$ und folglich $u - v = u + v$, also ist $\{u+v, u-v\}$ sicher nicht linear unabhängig.

2. **“⇒”** Seien $\{u, v, w\}$ linear unabhängig und seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ so dass

$$\begin{aligned} 0_V =& \alpha(u+v) + \beta(v+w) + \gamma(w+u) \\ =& (\alpha+\gamma)u + (\alpha+\beta)v + (\beta+\gamma)w \end{aligned}$$

Nach Annahme sind also $0 = \alpha+\gamma = \alpha+\beta = \beta+\gamma$. Es gilt also $\gamma = -\alpha =$, $\beta = -\alpha$ und $\beta + \gamma = -2\alpha$. Folglich ist $\alpha = 0$ und also $0 = \alpha = -\beta = -\gamma = 0$.

“⇐”: Seien $\{u+v, v+w, w+u\}$ linear unabhängig und $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ mit

$$0_V = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

Dann gilt auch

$$0_V = \left(\frac{1}{2}\alpha\right)u + \left(\frac{1}{2}\beta\right)v + \left(\frac{1}{2}\gamma\right)w$$

Definiere

$$\begin{aligned} \alpha' =& \alpha + \beta - \gamma \\ \beta' =& -\alpha + \beta + \gamma \\ \gamma' =& \alpha - \beta + \gamma \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\alpha'(u+v) + \beta'(v+w) + \gamma'(w+u) = 2(\alpha u) + 2(\beta v) + 2(\gamma w)$$

Bitte wenden!

Also ist $0 = \alpha' = \beta' = \gamma'$. Es folgen

$$\begin{aligned} 2\alpha =& \alpha' + \gamma' = 0 \\ 2\beta =& \alpha' + \beta' = 0 \\ 2\gamma =& \beta' + \gamma' = 0 \end{aligned}$$

und also $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Dies zeigt, dass $\{u, v, w\}$ linear unabhängig ist.

Bemerkung: Wo wurde verwendet, dass u, v, w paarweise verschieden sind?

5. 1. Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, dann ist

$$v := \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ t \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\gamma \\ 2\beta + 4\gamma \\ t(\beta + \gamma t) \end{pmatrix}$$

Sei $v = 0$, dann ist entweder $t = 0$ oder $\beta = -\gamma t$. Falls $t = 0$, sei $\gamma := 1$, $\beta := -2$, $\alpha := -2$, dann ist $0_V = v$ eine nicht-triviale Linearkombination und folglich ist für $t = 0$ die Menge

$$\{(1, 0, 0), (0, 2, t), (2, 4, t^2)\}$$

linear abhängig.

Sei also $v = 0$ und $t \neq 0$. Dann ist $\beta = -\gamma t$ und $2\beta = -4\gamma$, folglich ist $t = 2$. Also ist $\alpha = \beta = -2\gamma$. Sei $\gamma = 1$, also $\alpha = \beta = -2$, dann gilt

$$v = \begin{pmatrix} -2 + 2 \\ -4 + 4 \\ 2(-2 + 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Folglich ist

$$\{(1, 0, 0), (0, 2, t), (2, 4, t^2)\}$$

linear abhängig.

Falls $t \neq 2$, $t \neq 0$ und $v = 0$, dann folgt aus obiger Argumentation, $\beta = \gamma = 0$ (da sonst $t(\beta + \gamma t) \neq 0$), und also auch $\alpha = 0$. Somit ist die Menge

$$\{(1, 0, 0), (0, 2, t), (2, 4, t^2)\}$$

für $t \notin \{0, 2\}$ linear unabhängig.

2. Seien $v_1, \ldots, v_n$ die Spalten von A, und seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Sei $v := \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$.

Eine Induktion zeigt, dass für den k-ten Eintrag $v^{(k)}$ von v gilt

$$v^{(k)} = \sum_{i=k}^{n} \alpha_i A_{ki}$$

Siehe nächstes Blatt!

Falls $n = 1$, dann ist nichts zu zeigen. Sei die Aussage also wahr für jede obere Dreiecksmatrix $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Sei $N := n+1$ und $A \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ eine obere Dreiecksmatrix. Dann existiert ein $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, ein Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ so dass

$$A = \begin{pmatrix} B & u \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Seien $w_1, \dots, w_n$ die Spaltenvektoren von B, $v_1, \dots, v_N$ die Spaltenvektoren von A, und sei $v := \sum_{k=1}^N \alpha_k v_k$. Sei $1 \leq k \leq n$, dann gilt für den k-ten Eintrag $v^{(k)}$ von v

$$\begin{aligned} v^{(k)} &= \sum_{i=1}^N \alpha_i v_i^{(k)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i^{(k)} + \alpha_N u^{(k)} = \sum_{i=k}^n \alpha_i B_{ki} + \alpha_N u^{(k)} \\ &= \sum_{i=k}^n \alpha_i A_{ki} + \alpha_N A_{kN} = \sum_{i=k}^N \alpha_i A_{ki} \end{aligned}$$

Es gilt $v^{(N)} = \alpha_N A_{NN} = \sum_{k=N}^N \alpha_k A_{Nk}$ und folglich ist die Formel bewiesen.

Nehmen wir also an, dass $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine obere Dreiecksmatrix ist, mit $A_{ii} \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq n$. Seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ die Spalten von A und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ so dass $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$, also $0 = \sum_{i=k}^n \alpha_i A_{ik}$ für alle $1 \leq k \leq n$. Insbesondere gilt $0 = \alpha_n A_{nn}$, und aus $A_{nn} \neq 0$ folgt $\alpha_n = 0$. Sei $1 \leq k < n$ und seien $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$. Dann gilt nach Annahme $0 = \sum_{i=k}^n \alpha_i A_{ki} = \alpha_k A_{kk}$ und folglich $\alpha_k = 0$. Es folgt also $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ und folglich sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig.

3. Angenommen $\alpha \sin(x) + \beta \cos(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ nicht beide null. Dann gilt
$$\alpha \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\beta \quad \forall x \in \cos^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$
Da $\frac{\sin(\pi/4)}{\cos(\pi/4)} = 1$, folgt $\alpha = -\beta$ und da nach Annahme nicht beide null sind, gilt also $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1$ für alle $x \in \cos^{-1}(\mathbb{R})$, was natürlich nicht stimmt.

4. Angenommen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha e^{sx} + \beta e^{rx} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist $\alpha e^{(s-r)x} = -\beta$. Also ist $e^{(s-r)x}$ konstant, und folglich $s = r$. Das ist ein Widerspruch.

6. 1. **“$\Rightarrow$”:** Angenommen $ad - bc = 0$ mit $d \neq 0$ oder $b \neq 0$, dann gilt
$$d \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc \\ bd - bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Also ist $\mathcal{B}$ keine Basis.
Falls $b = d = 0$, dann ist $\mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix} a \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} c \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$ sicher nicht linear unabhängig. Wir haben also gezeigt, dass für jede Basis $\mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)\}$ von $\mathbb{C}^2$ gilt $ad - bc \neq 0$.

Bitte wenden!

"$\Leftarrow$": Angenommen $D := ad - bc \neq 0$ und $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2$. Definiere

$$\alpha := \frac{dx - cy}{D} \quad \beta := \frac{-bx + ay}{D}$$

dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} &= \frac{1}{D} \begin{pmatrix} (dx - cy)a + (-bx + ay)c \\ (dx - cy)b + (-bx + ay)d \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{D} \begin{pmatrix} (ad - bc)x \\ (ad - bc)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{C}^2$ und da $\dim \mathbb{C} = 2$ (als Vektorraum über $\mathbb{C}$), folgt dass $\mathcal{B}$ eine Basis ist.

2. Die Mengen

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) \right\}, \mathcal{B}_2 = \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right) \right\}$$

sind disjunkte Basen.