# Serie 5:
# Lineare (Un-)Abhängigkeit, Basis & Dimension

**1.** Seien $A_1, A_2 \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Zeigen Sie, dass $\{A_1, A_2\}$ linear unabhängig ist.
2. Sei

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \mid d = e = 0, b - a = f, 3a = c \right\}$$

   Beweisen Sie, dass $\langle A_1, A_2 \rangle = M$.
3. Finden Sie $A_3 \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ so dass $\{A_1, A_2, A_3\}$ linear unabhängig ist. Ist $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$?

**2.** Das Ziel dieser Aufgabe ist, den Ring der Polynome über einem beliebigen Körper formal zu definieren. Im Folgenden ist $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper. Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass die Menge $\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist. Im Folgenden bezeichne $\mathbb{K}[X]$ die Teilmenge *der schliesslich verschwindenden* Funktionen in $\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$, d.h.

$$\mathbb{K}[X] = \{f \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0} \mid \exists N \in \mathbb{N}_0 \forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N \implies f(n) = 0\}.$$

**a)** Zeigen Sie, dass $\mathbb{K}[X]$ ein Unterraum ist.

**b)** Zeigen Sie, dass $\mathbb{K}[X]$ kein endliches Erzeugendensystem besitzt.

**Bitte wenden!**

♡**c)** Gegeben $k \in \mathbb{N}_0$, sei $X^k \in \mathbb{K}[X]$ die Abbildung gegeben durch

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \ X^k(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Menge $S = \{X^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ linear unabhängig ist und dass $\mathbb{K}[X]$ von $S$ erzeugt wird.

**d)** Definieren Sie eine Verknüpfung $* : \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ wie folgt: Gegeben $f, g \in \mathbb{K}[X]$ sei $f * g$ definiert durch

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : (f * g)(k) = \sum_{\substack{(l,m) \in \mathbb{N}_0^2 \\ l+m=k}} f(l)g(m).$$

Zeigen Sie, dass $*$ wohldefiniert ist, Bild in $\mathbb{K}[X]$ besitzt und dass $*$ mit der Vektorraumstruktur verträglich ist, d.h. für alle $f, g_1, g_2 \in \mathbb{K}[X]$ und für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $f * (g_1 + \lambda \cdot g_2) = f * g_1 + \lambda \cdot (f * g_2)$.

**e)** Zeigen Sie, dass $X^k * X^l = X^{k+l}$ gilt für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$.

**f)** Zeigen Sie, dass $\mathbb{K}[X]$ mit den Verknüpfungen $+$ und $*$ ein kommutativer Ring mit Einselement $X^0$ ist.

Die Menge $\mathbb{K}[X]$ ist der *Ring der Polynome* über $\mathbb{K}$. Man schreibt normalerweise $1$ für das Element $X^0$ und $X$ für $X^1$, sowie $\lambda f$ für $\lambda \cdot f$ und $fg$ für $f * g$. Da die Menge $\{X^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist, besitzt jedes Polynom $f$ in $\mathbb{K}[X]$ eine eindeutige Darstellung der Form

$$f = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k.$$

**3.** Im Folgenden bezeichnen wir mit $V \subseteq {\mathbb{F}_3}^{\mathbb{F}_3}$ die Menge der Polynomfunktionen auf $\mathbb{F}_3$, d.h. für alle $f \in V$ existieren $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{F}_3$, sodass $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ gilt für alle $x \in \mathbb{F}_3$.

**g)** Zeigen Sie, dass $V$ ein Unterraum von ${\mathbb{F}_3}^{\mathbb{F}_3}$ ist.

**h)** Finden Sie ein endliches Erzeugendensystem für $V$.

**4.** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper in dem $1 \neq -1$, und sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

1. Seien $u, v \in V$ und $u \neq v$. Dann ist $\{u, v\}$ genau dann linear unabhängig, wenn $\{u + v, u - v\}$ linear unabhängig ist.

**Siehe nächstes Blatt!**

2. Seien $u, v, w \in V$ paarweise verschieden. Dann ist $\{u, v, w\}$ genau dann linear unabhängig, wenn $\{u+v, v+w, u+w\}$ linear unabhängig ist.

**5.** Sind die folgenden Mengen linear unabhängig über $\mathbb{R}$?

1. $\{(1,0,0), (0,2,t), (2,4,t^2)\}$ für ein $t \in \mathbb{R}$.
2. Die Menge der Spalten einer oberen Dreiecksmatrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $A_{ii} \neq 0$.
3. $\{\sin(x), \cos(x)\} \subset \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$
4. $\{e^{rx}, e^{sx}\} \subset \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ für fixe $s, r \in \mathbb{R}$.

**6.** Betrachten Sie den $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$. Sei $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}^2$ gegeben durch

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\}$$

für $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

1. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ genau dann eine Basis von $\mathbb{C}^2$ ist, wenn gilt $ad - bc \neq 0$.
2. Finden Sie zwei disjunkte Basen $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subset \mathbb{C}^2$ (d.h. $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$).

**7. Online-Abgabe**

**Bitte wenden!**

**1.** (Aufgabe aus der Zwischenprüfung 2014) Welche der folgenden Mengen von Vektoren im $\mathbb{R}^4$ sind linear unabhängig?

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(e) Keine der Mengen ist linear unabhängig.

**2.** Jede Teilmenge $S \subset V$ eines Vektorraums $V$ über $\mathbb{K}$, die den Nullvektor enthält, ist linear abhängig

(a) richtig

(b) falsch

**3.** Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Sei $v \in V$, dann ist die Menge $W := \{w \in V \mid \exists \lambda \in \mathbb{K} : w = \lambda \cdot v\}$ ein Unterraum von $V$.

(b) Eine Teilmenge $W \subset V$ ist genau dann ein Unterraum, wenn $\langle W \rangle = W$.

(c) Seien $S_1, S_2 \subset V$ Teilmengen. Dann gilt $\langle S_1 \cup S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$.

(d) Seien $S_1, S_2 \subset V$ Teilmengen. Dann gilt $\langle S_1 \cap S_2 \rangle \subset \langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle$.

(e) Keine der Aussagen ist richtig.

**4.** Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $\dim V = n < \infty$. Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Es existieren eindeutige Unterräume $W_1, W_2 \subset V$ mit $\dim W_1 = 0$ und $\dim W_2 = n$.

(a) Wahr

(b) Falsch

**5.** Sei $V$ ein Vektorraum über einen Körper $\mathbb{K}$. Sei $S_1 \subset V$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Falls $S$ linear abhängig ist, so ist jeder Vektor $v \in S$ eine Linearkombination von Vektoren in $S \setminus \{v\}$.

(b) Sei $S$ linear abhängig und $T \subset S$. Dann ist $T$ linear abhängig.

(c) Sei $S$ linear unabhängig und $T \subset S$. Dann ist $T$ linear unabhängig.

(d) Sei $S_2 \subset V$ mit $\langle S_2 \rangle \subset \langle S_1 \rangle$, dann gilt $|S_2| \leq |S_1|$.

(e) Seien $\dim V < \infty$ und $S_1$ linear unabhängig. Sei $S_2 \subset V$ mit $\langle S_2 \rangle = V$, dann gilt $|S_1| \leq |S_2|$.

(f) Keine der Aussagen ist richtig.

**Bitte wenden!**

**6.** *Prüfung Winter 2017:* Sei $V$ ein Vektorraum über einem Körper $K$. Seien $S_1, S_2 \subset V$ Teilmengen. Dann gilt

$$\operatorname{span}(S_1 \cup S_2) = \operatorname{span}(S_1) \cup \operatorname{span}(S_2).$$

(a) Wahr.

(b) Falsch.

**7.** *Prüfung Winter 2017:* Seien $V$ ein Vektorraum, $S \subset V$ eine Teilmenge und $W$ ein Unterraum von $V$. Wenn $S \subset W$, dann gilt $W \subset \operatorname{span}(S)$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

**8.** *Prüfung Winter 2017:* Seien $V$ ein Vektorraum und $W_1, W_2 \subset V$ Unterräume mit $\dim W_i = m_i$ für $i = 1, 2$ und sei $W_1 \oplus W_2 = V$. So gilt

$$\dim (W_1 \oplus W_2) = m_1 + m_2.$$

(a) Wahr.

(b) Falsch.

**9.** *Prüfung Winter 2017:* Sei $V$ ein dreidimensionaler Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subset V$ Unterräume mit $\dim(U_1) = 1, \dim(U_2) = 2$. Dann gilt

$$V = U_1 + U_2.$$

(a) Wahr.

(b) Falsch.

**Siehe nächstes Blatt!**

**10.** *Prüfung Winter 2017:* Sei $V$ ein Vektorraum mit einem unendlichen Erzeugendensystem. Dann ist $V$ unendlich-dimensional.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

**11.** *Prüfung Sommer 2017:* Betrachten Sie die Unterräume $V_1 = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$ und $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$. Dann ist $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

**12.** *Prüfung Sommer 2017:* Sei $V$ ein Vektorraum. Dann gilt: Jede Teilmenge von $V$ ist entweder linear abhängig oder linear unabhängig.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

**13.** *Prüfung Sommer 2017:* Drei Vektoren $v_1, v_2, v_3$ sind linear unabhängig genau dann wenn sie paarweise linear unabhängig sind (also wenn jede der Mengen $\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}$ linear unabhängig ist)

(a) Wahr.

(b) Falsch.

**Bitte wenden!**

**14.** *Prüfung Sommer 2017:* Sei $V$ ein Vektorraum. Für jede nicht-leere Teilmenge $S \subset V$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- Kein Element von $S$ ist eine Linearkombination der übrigen Elemente von $S$.
- Jeder Vektor in $V$ besitzt höchstens eine Darstellung als Linearkombination der Elemente von $S$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

**15.** *Prüfung Sommer 2017:* Sei $V$ ein endlichdimensionaler Vetorraum und seien $W_1, W_2 \subset V$ Unterräume mit $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$. Dann gilt

$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim(W_1) \cdot \dim(W_2).$$

(a) Wahr.

(b) Falsch.

**16.** *Prüfung Sommer 2017:* Sei $V$ ein Vektorraum. Je zwei Erzeugendensysteme von $V$ haben dieselbe Kardinalität.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

**Abgabe der schriftlichen Aufgaben:** Vor Donnerstag, den 26. Oktober 10:00 Uhr vormittags im Raum HG J 68, in einem der Fächer beschriftet mit *Abgabe*.