Lösung 6:
Lineare Abbildungen, Quotientenräume

1. a) Es ist

$$T(0_V) = T(0_V + 0_V) = T(0_V) + T(0_V)$$

und da $(W, +, 0_W)$ per definitionem eine abelsche Gruppe ist, folgt aus der Kürzungsregel, dass $0_W = T(0_V)$.

b) **"⇒"** Falls T linear ist, dann gilt

$$\begin{aligned} T(v_1 - \lambda v_2) &= T(v_1 + (-\lambda)v_2) = T(v_1) + T((-\lambda)v_2) \\ &= T(v_1) + (-\lambda)T(v_2) = T(v_1) - \lambda T(v_2). \end{aligned}$$

"⇐" Für $v_1, v_2 \in V$ gilt $v_1 + v_2 = v_1 - (-1)v_2$, und folglich

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1 - (-\lambda)v_2) = T(v_1) - (-1)T(v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

und ähnlich ist $\lambda v_1 = 0_V - (-\lambda)v_1$ und folglich

$$T(\lambda v_1) = T(0_V) - (-\lambda)T(v_2) = \lambda T(v_2).$$

c) Seien $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}(T)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann folgt aus der Linearität von T, dass

$$T(v_1 - \lambda v_2) = T(v_1) - \lambda T(v_2) = 0_W - \lambda 0_W = 0_W.$$

Somit ist $v_1 - \lambda v_2 \in \mathrm{Ker}(T)$ und folglich ist $\mathrm{Ker}(T)$ ein Unterraum.

Seien $w_1, w_2 \in \mathrm{Im}(T)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Per definitionem existieren $v_1, v_2 \in V$, sodass $w_1 = T(v_1)$ und $w_2 = T(v_2)$ gelten. Es folgt aus der Linearität von T, dass

$$w_1 - \lambda w_2 = T(v_1) - \lambda T(v_2) = T(v_1 - \lambda v_2) \in \mathrm{Im}(T)$$

und folglich ist $\mathrm{Im}(T)$ ein Unterraum.

Bitte wenden!

d) Da $T^{-1}(\{w\})$ ein Unterraum ist, ist $0_V \in T^{-1}(\{w\})$, also gilt insbesondere $T(0_V) = w \neq 0_W$. Somit ist nach Teilaufgabe a) die Abbildung T nicht linear.

2. **a)** Da W ein Vektorraum ist, gilt $w - w = 0 \in W$ für alle $w \in W$, also ist R reflexiv.

Falls $v_1 - v_2 \in W$, dann ist auch $-(v_1 - v_2) = v_2 - v_1 \in W$ und R ist symmetrisch. Da W unter Addition abgeschlossen ist, gilt für $v_1 - v_2 \in W$ und $v_2 - v_3 \in W$ auch

$$v_1 - v_3 = (v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) \in W$$

Also ist R transitiv und somit eine Äquivalenzrelation.

b) Angenommen $v_1 \sim v_2$ und $v_1' \sim v_2'$, dann existieren $w, w' \in W$ so dass $v_1 = v_2 + w$ und $v_1' = v_2' + w'$. Also ist

$$(v_2 + v_2') - (v_1 + v_1') = w + w' \in W$$

Es folgt also $[v_2 + v_2'] = [v_1 + v_1']$ und somit hängt die Addition nicht von der Wahl der Repräsentanten ab und ist wohldefiniert.

Sei $\lambda \in \mathbb{K}$, dann ist

$$\lambda v_2 - \lambda v_1 = \lambda w \in W$$

Es folgt also $[\lambda v_2] = [\lambda v_1]$ und somit hängt die skalare Multiplikation nicht von der Wahl des Repräsentanten ab und ist wohldefiniert.

Die Vektorraumaxiome folgen sofort aus den Vektorraumaxiomen für V. Seien $u, v, w \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, dann

V1) $[u] + [v] = [u + v] = [v + u] = [v] + [u]$

V2) $([u] + [v]) + [w] = [u + v] + [w] = [(u + v) + w] = [u + (v + w)]$
$= [u] + [v + w] = [u] + ([v] + [w])$

V3) $[0_V] + [v] = [0_V + v] = [v]$

V4) $[-v] + [v] = [-v + v] = [0_V]$

V5) $1 \cdot [v] = [1 \cdot v] = [v]$

V6) $(\lambda\mu) \cdot [v] = [(\lambda\mu) \cdot v] = [\lambda \cdot (\mu \cdot v)] = \lambda \cdot [\mu \cdot v] = \lambda \cdot (\mu \cdot [v])$

V7) $\lambda \cdot ([u] + [v]) = \lambda \cdot [u + v] = [\lambda \cdot (u + v)] = [\lambda \cdot u + \lambda \cdot v]$
$= [\lambda \cdot u] + [\lambda \cdot v] = \lambda \cdot [u] + \lambda \cdot [v]$

V8) $(\lambda + \mu) \cdot [v] = [(\lambda + \mu) \cdot v] = [\lambda \cdot v + \mu \cdot v] = [\lambda \cdot v] + [\mu \cdot v] = \lambda \cdot [v] + \mu \cdot [v]$

Also ist $V/\sim$ mit diesen Verknüpfungen ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

Siehe nächstes Blatt!

c) Wir definieren $T : V/W \to V/\sim$ durch $T(v + W) = [v]$ $(v \in W)$. Wir müssen zuerst zeigen, dass die Abbildung wohldefiniert ist. Seien also $v_1, v_2 \in V$, so dass $v_1 + W = v_2 + W$, dann existiert für jedes $w_1 \in W$ ein $w_2 \in W$, so dass $v_1 + w_1 = v_2 + w_2$. Für $w_1 = 0$ folgt insbesondere, dass $v_1 = v_2 + w$ für ein $w \in W$, also $v_1 - v_2 \in W$ und also $[v_1] = [v_2]$. Somit ist das Bild von $v + W$ unter T nicht vom Repräsentanten von $v+W$ abhängig und T also wohldefiniert.

Für die geforderte Linearität berechnen wir für $u, v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} T((u + W) + (v + W)) =& T((u + v) + W) = [u + v] = [u] + [v] \\ =& T(u + W) + T(v + W) \\ T(\lambda(u + W)) =& T(\lambda u + W) = [\lambda u] \\ =& \lambda \cdot [u] = \lambda \cdot T(u + W) \end{aligned}$$

Die Abbildung ist sicherlich surjektiv, da jedes Element in $x \in V/\sim$ per Definition von der Form $x = [v]$ für ein $v \in V$, also auch $x = T(v + W)$. Für die Injektivität nehmen wir an, dass $u, v \in V$ mit $T(u + W) = T(v + W)$, also $[u] = [v]$. Dann gilt $u - v \in W$ und folglich existiert $w \in W$ so dass $u = v + w$. Wir müssen nun daraus folgern, dass $u + W = v + W$. Sei $w' \in W$, dann ist $u + w' = (v + w) + w' = v + (w + w') \in v + W$ und also $u + W \subset v + W$, da $w' \in W$ beliebig war. Andererseits gilt für beliebige $w' \in W$ auch $v + w' = (u - w) + w' = u + (-w + w') \in u + W$ und also $v + W \subset u + W$, und folglich $u + W = v + W$. Also ist T bijektiv.

3. **a)** Da V nach Voraussetzung ein endlichdimensionaler Vektorraum ist, gilt dasselbe für V/W. Sei $\dim(V/W) = m$ und sei $\{x_1, \dots, x_m\}$ eine Basis von V/W. Per definitionem existieren $u_1, \dots, u_m \in V$, so dass $x_i = u_i + W$. Sei $U = \langle u_1, \dots, u_m \rangle \subset V$. Wir behaupten, dass $V = W \oplus U$. Wir zeigen zuerst, dass $U \cap W = \{0_V\}$ gilt. Angenommen $v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m \in U \cap W$, dann ist wegen $v \in W$

$$\begin{aligned} 0_{V/W} =& v + W = (\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m) + W \\ =& \lambda_1(u_1 + W) + \dots + \lambda_m(u_m + W) \\ =& \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m \end{aligned}$$

und folglich $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$. Dies zeigt einerseits, dass $v = 0_V$ gilt – also insbesondere haben wir $U \cap W = \{0_V\}$ gezeigt – und andererseits, dass $\{u_1, \dots, u_m\}$ eine linear unabhängig Menge von m Vektoren ist. Da nach Konstruktion $\dim U = m = \dim(V/W)$ folgt

$$\begin{aligned} \dim(U + W) =& \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \\ =& (\dim V - \dim W) + \dim W + 0 = \dim V \end{aligned}$$

und folglich ist $U + W = V$. Also insbesondere $V = U \oplus W$.

Bitte wenden!

b) **“⇒”** Wir nehmen an, es gelte $W_1 \not\subseteq W_2$ (oder dazu äquivalent $W_1 \setminus W_2 \neq \{\}$) und $W_2 \not\subseteq W_1$ (bzw. $W_2 \setminus W_1 \neq \{\}$), und dass die Vereinigung $W_1 \cup W_2$ ein Unterraum ist. Seien $w_1 \in W_1 \setminus W_2$ und $w_2 \in W_2 \setminus W_1$. Da $w_1, w_2 \in W_1 \cup W_2$ gilt, ist nach Voraussetzung auch $v = w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$. Insbesondere gilt also $v \in W_1$ oder $v \in W_2$. Angenommen $v \in W_1$, dann ist auch $w_2 = v - w_1 \in W_1$ im Widerspruch zur Wahl von w_2. Also ist $v \in W_2$, und somit auch $w_1 = v - w_2 \in W_2$, ebenfalls im Widerspruch zur Wahl von w_1. Also können nicht alle Annahmen gleichzeitig wahr sein und es folgt die gewünschte Implikation.

“⇐” Falls $W_1 \subseteq W_2$ gilt, dann ist $W_1 \cup W_2 = W_2$ und somit $W_1 \cup W_2$ nach Voraussetzung ein Unterraum. Analog überprüft man den umgekehrten Fall.

c) Reflexivität folgt aus Teilaufgabe a). Symmetrie folgt aus der symmetrischen Formulierung der definierenden Relation: Seien $W_1, W_2, U \in \mathcal{V}$, sodass $W_1 \oplus U = W_2 \oplus U$, dann ist wegen der Symmetrie von $=$ auch $W_2 \oplus U = W_1 \oplus U$, und es folgt die Symmetrie der Relation. Es bleibt, die Transitivität zu beweisen. Hierfür zeigen wir zuerst, dass je zwei Unterräume derselben Dimension einen gemeinsamen direkten Summanden besitzen.

Behauptung: Gegeben $W_1, W_3 \in \mathcal{V}$ mit $\dim(W_1) = \dim(W_3)$, dann gilt $W_1 \approx W_3$.

Wir machen eine umgekehrte Induktion über die Dimension von W_1. Dafür verwenden wir implizit, dass für jede Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq \dim(V)$ ein Unterraum der Dimension k existiert. Falls $\dim(V) = 0$ ist, ist die Aussage klar. Sei also $\dim(V) \geq 1$ und sei $\{v_1, \ldots, v_{\dim(V)}\}$ eine Basis von V. Dann ist für jedes $1 \leq k \leq \dim(V)$ die Menge $\{v_1, \ldots, v_k\}$ eine linear unabhängige Menge mit k Elementen und somit $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ ein Unterraum der Dimension k.

Falls $\dim(W_1) = \dim(V)$ gilt, ist die Aussage klar, da $V = W_i = W_i \oplus \{0_V\}$.

Sei $\dim(W_1) = \dim(V) - 1$. Falls $W_1 = W_3$, dann folgt $W_1 \approx W_3$ aus der Reflexivität. Sei also $W_1 \neq W_3$. Falls $W_1 \subseteq W_3$, dann folgt aus der Gleicheit der Dimensionen, dass $W_1 = W_3$ gilt, im Widerspruch zur Voraussetzung, und folglich ist $W_1 \not\subseteq W_3$. Nach Vertauschung der beiden Unterräume folgt analog $W_3 \not\subseteq W_1$. Insbesondere wissen wir aus Teilaufgabe a), dass $W_1 \cup W_3$ kein Unterraum und somit insbesondere von V verschieden ist. Dies impliziert, dass ein $v \in V$ existiert, sodass $v \notin W_1$ und $v \notin W_3$ gilt. Somit ist W_1 ein echter Unterraum von $W_1 + \langle v \rangle$ und W_3 ein echter Unterraum von $W_3 + \langle v \rangle$. Aus der Voraussetzung $\dim(W_1) = \dim(W_3) = n - 1$, folgt

$$V = W_1 + \langle v \rangle = W_3 + \langle v \rangle.$$

Sei $i = 1, 3$ und $w \in W_i \cap \langle v \rangle$. Angenommen $w \neq 0_V$. Da $w \in \langle v \rangle$, ist $w = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$, und aus $w \neq 0_V$ folgt $\lambda \neq 0$. Da W_i ein Unterraum ist, ist

Siehe nächstes Blatt!

W_i abgeschlossen unter skalarer Multiplikation und es gilt $v = \lambda^{-1}w \in W_i$, im Widerspruch zur Wahl von v. Also folgt $W_i \cap \langle v \rangle = \{0_V\}$ und somit $V = W_i \oplus \langle v \rangle$ für $i = 1, 3$, insbesondere also $W_1 \approx W_3$.

Seien nun $W_1, W_3 \in \mathcal{V}$ von derselben Dimension $0 \leq k < n-1$. Wir können aufgrund der Reflexivität der Relation $\approx$ wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass W_1 und W_3 verschieden sind. Angenommen wir wissen bereits, dass für Paare von Unterräumen der Dimension $k+1$ ein gemeinsamer direkter Summand existiert. Wie oben argumentiert, folgt aus der Gleichheit der Dimension, dass $W_1 \cup W_3$ kein Unterraum ist, und somit ein $v \in V$ existiert, sodass $v \notin W_1 \cup W_3$ ist. Dann sind $W_1 + \langle v \rangle$ und $W_2 + \langle v \rangle$ Unterräume der Dimension $k+1$. Insbesondere existiert ein direkter Summand $U \in \mathcal{V}$, sodass

$$V = (W_1 + \langle v \rangle) \oplus U = (W_2 + \langle v \rangle) \oplus U$$

gilt. Wir behaupten, dass $U' = \langle v \rangle + U$ ein gemeinsamer, direkter Summand ist.

Sei $w \in W_i \cap (\langle v \rangle + U)$, dann ist $w = \lambda v + u$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$ und ein $u \in U$. Nach Konstruktion ist $u = w - \lambda V \in (W_i + \langle v \rangle) \cap U$ und somit folgt nach Wahl von U, dass $u = 0$ und also $w = \lambda v \in W_i \cap \langle v \rangle$. Wie bereits oben argumentiert, folgt aus $v \notin W_i$, dass $\lambda = 0$ und folglich $w = 0_V$. Dies zeigt, dass $W_i \cap (\langle v \rangle + U) = \{0_V\}$ gilt. Es bleibt zu zeigen, dass $V = W_i + U'$ gilt. Dies ist eine Konsequenz der Assoziativität der Addition: Sei $w \in V$, dann folgt aus $V = (W_i + \langle v \rangle) \oplus U$, dass $w_i \in W_i$, $\lambda \in \mathbb{K}$, sowie $u \in U$ existieren, sodass gilt

$$w = (w_i + \lambda v) + u = w_i + (\lambda v + u) \in W_i + (\langle v \rangle + U),$$

und da $w \in V$ beliebig war, folgt $V = W_i + (\langle v \rangle + U)$.

Wir beweisen die Transitivität von $\approx$:

> **Behauptung:** Seien W_1, W_2, $W_3 \in \mathcal{V}$, sodass $W_1 \approx W_2$ und $W_2 \approx W_3$ gelten. Dann gilt auch $W_1 \approx W_3$.

Wir bemerken zuerst, dass für $W_1', W_2', U \in \mathcal{V}$ mit $W_1' \oplus U = W_2' \oplus U$ folgt

$$\dim(W_1') + \dim(U) = \dim(W_1' \oplus U) = \dim(W_2' \oplus U) = \dim(W_2') + \dim(U)$$

und somit insbesondere $W_1' \approx W_2' \implies \dim(W_1') = \dim(W_2')$. Seien also $W_1, W_2, W_3 \in \mathcal{V}$ mit $W_1 \approx W_2$ und $W_2 \approx W_3$ gegeben, dann gilt insbesondere $\dim(W_1) = \dim(W_3)$. Es folgt $W_1 \approx W_3$ sofort aus der vorangehenden Behauptung.

Aus der obigen Diskussion folgt, dass zwei Unterräume W_1, W_2 von V genau dann äquivalent sind bezüglich der Relation $\approx$, wenn sie dieselbe Dimension besitzen, d.h. die Äquivalenzklasse von $W_1 \in \mathcal{V}$ ist gegeben durch

$$[W_1]_\approx = \dim^{-1}(\{\dim(W_1)\}) = \{W \in \mathcal{V} \mid \dim(W) = \dim(W_1)\},$$

wobei wir die Dimension als Abbildung $\dim : \mathcal{V} \to \{0, \ldots, \dim(V)\}$ interpretieren.

Bitte wenden!

4. Wir wissen aus der Vorlesung, dass $V = W_1 \oplus W_2$, d.h. für alle $A \in V$ existieren eindeutige $B \in W_1, C \in W_2$, so dass $A = B + C$. Seien nämlich $A \in V$, $B, B' \in W_1$ und $C, C' \in W_2$, so dass $A = B + C = B' + C'$, dann ist $B - B' = C' - C \in W_1 \cap W_2$ und folglich $B = B'$ und $C = C'$.

Gegeben $A \in V$, dann schreiben wir $A_{\text{sym}} \in W_1$ und $A_{\text{skew}} \in W_2$ für die eindeutig bestimmten Elemente mit

$$A = A_{\text{sym}} + A_{\text{skew}}$$

Definiere

$$T : V/W_1 \to W_2, A + W_1 \mapsto A_{\text{skew}}$$

Wir müssen zeigen, dass die Abbildung wohldefiniert ist. Angenommen $A, A' \in V$ mit $A + W_1 = A' + W_1$. Per definitionem existiert ein $B \in W_1$, so dass $A' = A + B$, folglich gilt

$$\begin{aligned} A' =& A + B = (A_{\text{sym}} + A_{\text{skew}}) + B \\ =& \underbrace{(A_{\text{sym}} + B)}_{\in W_1} + A_{\text{skew}} \end{aligned}$$

Es gilt also $A'_{\text{skew}} = A_{\text{skew}}$ und somit ist T wohldefiniert. Wir überprüfen die Linearität. Seien $A, B \in V$, dann ist

$$\begin{aligned} A + B =& (A_{\text{sym}} + A_{\text{skew}}) + (B_{\text{sym}} + B_{\text{skew}}) \\ =& \underbrace{(A_{\text{sym}} + B_{\text{sym}})}_{\in W_1} + \underbrace{(A_{\text{skew}} + B_{\text{skew}})}_{\in W_2} \end{aligned}$$

Also ist $(A + B)_{\text{skew}} = A_{\text{skew}} + B_{\text{skew}}$ und folglich

$$\begin{aligned} T((A + W_1) + (B + W_1)) =& T((A + B) + W_1) = (A + B)_{\text{skew}} \\ =& A_{\text{skew}} + B_{\text{skew}} \\ =& T(A + W_1) + T(B + W_1) \end{aligned}$$

Ähnlich gilt für $\lambda \in \mathbb{R}$, dass

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot (A_{\text{sym}} + A_{\text{skew}}) = \underbrace{\lambda \cdot A_{\text{sym}}}_{\in W_1} + \underbrace{\lambda \cdot A_{\text{skew}}}_{\in W_2}$$

Also ist $(\lambda \cdot A)_{\text{skew}} = \lambda \cdot A_{\text{skew}}$. Es folgt

$$T(\lambda \cdot (A + W_1)) = T(\lambda \cdot A + W_1) = \lambda \cdot A_{\text{skew}} = \lambda \cdot T(A)$$

Es bleibt zu zeigen, dass T eine Bijektion ist. T ist sicherlich surjektiv, da für jedes $A \in W_2$ gilt $T(A + W_1) = A$. Seien also $A, B \in V$ mit $T(A + W_1) = T(B + W_1)$, dann gilt

$$\begin{aligned} 0 =& T(A + W_1) - T(B + W_1) \\ =& T((A + W_1) - (B + W_1)) \\ =& T((A - B) + W_1) \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Also ist $0 = (A-B)_{\text{skew}} = A_{\text{skew}} - B_{\text{skew}}$ und somit folgt

$$A = A_{\text{sym}} + A_{\text{skew}} = A_{\text{sym}} + B_{\text{skew}} = \underbrace{(A_{\text{sym}} - B_{\text{sym}})}_{\in W_1} + B$$

Also ist $A + W_1 = B + W_2$ und somit ist T injektiv.

5. a) Seien $v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt nach Definition der Vektorraumstruktur auf V/W, dass

$$\begin{aligned} p(v_1 - \lambda v_2) &= (v_1 - \lambda v_2) + W = (v_1 + (-\lambda)v_2) + W \\ &= (v_1 + W) + ((-\lambda)v_2 + W) = (v_1 + W) + (-\lambda)(v_2 + W) \\ &= (v_1 + W) - \lambda(v_2 + W) = p(v_1) - \lambda p(v_2). \end{aligned}$$

Nach Aufgabe 1.b) ist p also linear.

Für die Surjektivität sei $x \in V/W$ beliebig. Per definitionem ist dann $x = v + W$ für ein $v \in V$ und somit ist $x = p(v)$ für ein $v \in V$.

Zur Bestimmung des Kerns verwenden wir, dass W das Nullelement in V/W ist. Somit ist

$$\mathrm{Ker}(p) = \{v \in V \mid v + W = W\}.$$

Behauptung: Sei $v \in V$, dann gilt $v + W = W$ genau dann, wenn $v \in W$ ist. Insbesondere ist also $\mathrm{Ker}(p) = W$.

"$\Rightarrow$" Falls $W \subseteq v + W$ ist, dann existiert für jedes $w \in W$ ein $w' \in W$, sodass $w = v + w'$ gilt. Folglich ist $v = w - w' \in W$, da W nicht-leer ist. Wegen $v + W = W \implies W \subseteq v + W$, zeigt dies $v + W = W \implies v \in W$.

"$\Leftarrow$" Sei $v \in W$. Für beliebige $w \in W$ ist $v + w \in W$, da W nach Voraussetzung ein Unterraum ist. Somit folgt $v + W \subseteq W$. Andererseits ist $-v$ und somit auch $w - v \in W$. Folglich ist $w = v + (w - v) \in v + W$ und somit $W \subseteq v + W$. Beides zusammen impliziert $v + W = W$.

b) Sei $T : V \to U$ eine beliebige lineare Abbildung, sodass $W \subseteq \mathrm{Ker}(T)$ gilt. Wir definieren $\overline{T} : V/W \to U$ durch $\overline{T}(v + W) = T(v)$. Wir müssen zeigen, dass $\overline{T}$ wohldefiniert – d.h. $T(v)$ nicht von der Wahl eines Repräsentanten von $v + W$ abhängig – und linear ist. Seien $v, v' \in V$, sodass $v + W = v' + W$ gilt. Dann ist per definitionem $v' = v + w$ für ein $w \in W$. Da T linear und $W \subseteq \mathrm{Ker}(T)$ ist, folgt

$$T(v') = T(v + w) = T(v) + T(w) = T(v)$$

und somit ist $\overline{T}$ wohldefiniert. Für beliebige $v \in V$ berechnet man

$$(\overline{T} \circ p)(v) = \overline{T}(p(v)) = \overline{T}(v + W) = T(v)$$

Bitte wenden!

und somit ist $\overline{T} \circ p = T$. Linearität folgt sofort aus der Definition: Seien $v, v' \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{T}((v+W) - \lambda(v'+W)) &= \overline{T}(p(v) - \lambda p(v')) = \overline{T}(p(v - \lambda v')) \\ &= T(v - \lambda v') = T(v) - \lambda T(v') \\ &= \overline{T}(p(v)) - \lambda T(p(v')) \\ &= \overline{T}(v+W) - \lambda \overline{T}(v'+W). \end{aligned}$$

Es bleibt, die Eindeutigkeit von $\overline{T}$ zu beweisen. Sei $\Phi : V/W \to U$ eine lineare Abbildung, sodass $\Phi \circ p = T$ ist, dann gilt für alle $v \in V$, dass

$$\Phi(v+W) = (\Phi \circ p)(v) = T(v) = (\overline{T} \circ p)(v) = \overline{T}(v+W)$$

und somit ist $\Phi = \overline{T}$.

Man sagt üblicherweise, dass $\overline{T}$ die Eigenschaft hat, dass das folgende Diagramm *kommutiert*:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "p"'] & U \\ V/W \arrow[ur, "\overline{T}"'] & \end{tikzcd}$$

Das heisst, ob wir dem Pfeil T folgen (die Abbildung T anwenden) oder zuerst dem Pfeil p und dann dem Pfeil $\overline{T}$ folgen (zuerst die Abbildung p und dann die Abbildung $\overline{T}$ anwenden), macht am Emde keinen Unterschied (d.h. $T = \overline{T} \circ p$).

c) Die universelle Eigenschaft wird häufig in einem Diagramm der folgenden Form zusammengefasst:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "p"'] & U \\ V/W \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{T}"'] & \end{tikzcd}$$

wobei die Voraussetzung $W = \mathrm{Ker}(T)$ implizit bleibt. Wir zeigen zuerst, dass das Paar $(V/W, p)$ die universelle Eigenschaft besitzt. Sei also U ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $T : V \to U$ eine lineare Abbildung mit $W = \mathrm{Ker}(T)$. Wir wissen aus Aufgabe 5.b), dass eine eindeutige lineare Abbildung $\overline{T} : V/W \to U$ existiert, sodass $\overline{T} \circ p = T$ gilt. Wir müssen nur noch zeigen, dass $\overline{T}$ injektiv ist. Seien $v, v' \in V$ mit der Eigenschaft

$$\overline{T}(v+W) = \overline{T}(v'+W).$$

Aus der Linearität von $\overline{T}$, von T, sowie der definierenden Eigenschaft von $\overline{T}$ folgt:

$$\begin{aligned} 0_U &= \overline{T}(v+W) - \overline{T}(v'+W) = \overline{T}(v+W) + \overline{T}(-v'+W) \\ &= \overline{T}((v+W) + (-v'+W)) = \overline{T}((v-v')+W) \\ &= T(v-v') \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

und somit folgt $v - v' \in \operatorname{Ker}(T) = W$, also insbesondere $v + W = v' + W$. Dies zeigt die Injektivität von $\overline{T}$.

Sei nun gegeben irgendein anderer Vektorraum $\tilde{V}$ über $\mathbb{K}$ zusammen mit einer linearen Abbildung $q : V \to \tilde{V}$, sodass das Paar $(\tilde{V}, q)$ die universelle Eigenschaft besitzt. Wir wissen aus Teilaufgabe 5.a), dass $\operatorname{Ker}(p) = W$ gilt. Also existiert eine durch p und q eindeutig bestimmte injektive, lineare Abbildung $\overline{p} : \tilde{V} \to V/W$, sodass $p = \overline{p} \circ q$ gilt.

Wir behaupten, dass daraus folgt, dass $W = \operatorname{Ker}(q)$ gilt. Sei $v \in \operatorname{Ker}(q)$, dann ist

$$p(v) = \overline{p}(q(v)) = \overline{p}(0) = 0_{V/W}$$

und folglich ist $v \in \operatorname{Ker}(p) = W$. Insbesondere ist also $\operatorname{Ker}(q) \subset W$. Sei andererseits $v \in W$, dann ist

$$0_{V/W} = p(v) = \overline{p}(q(v))$$

und weil $\overline{p}$ injektiv ist und weil nach Aufgabe 1.a) gilt $\overline{p}(0_{\tilde{V}}) = 0_{V/W}$, folgt $q(v) = 0_{\tilde{V}}$. Insbesondere ist also $W \subset \operatorname{Ker}(q)$. Beides zusammen beweist $W = \operatorname{Ker}(q)$.

Aufgrund der universellen Eigenschaft von $(V/W, p)$ existiert genau eine injektive lineare Abbildung $\overline{q} : V/W \to \tilde{V}$, sodass $\overline{q} \circ p = q$ gilt. Da die Komposition zweier injektiver Abbildungen injektiv ist, ist $\overline{p} \circ \overline{q} : V/W \to V/W$ eine injektive lineare Abbildung, mit der Eigenschaft

$$p = \overline{p} \circ q = \overline{p} \circ (\overline{q} \circ p) = (\overline{p} \circ \overline{q}) \circ p$$

und wegen Aufgabe 5.a) und **UE**, ist $\overline{p} \circ \overline{q}$ durch p eindeutig bestimmt. Andererseits gilt $p = I_{V/W} \circ p$ und wegen der Eindeutigkeit folgt also $\overline{p} \circ \overline{q} = I_{V/W}$.

Dies lässt sich auch aus der universellen Eigenschaft und dem folgenden Diagramm ablesen:

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, "q"] \arrow[dr, "p"] & \\
V/W \arrow[r, "\overline{q}"'] \arrow[rr, bend right, "\overline{p}\circ\overline{q}"'] & \tilde{V} \arrow[r, "\overline{p}"'] & V/W
\end{tikzcd}$$

wobei separat zu argumentieren ist, dass das Diagramm kommutiert (was genau die charakterisierende Eigenschaft der Abbildungen $\overline{q}$ und $\overline{p}$ ist), und warum dies die Schlussfolgerung impliziert.

Analog folgt aus

$$q = \overline{q} \circ p = \overline{q} \circ (\overline{p} \circ q) = (\overline{q} \circ \overline{p}) \circ q,$$

dass gilt $\overline{q} \circ \overline{p} = I_{\tilde{V}}$. Somit besitzt $\overline{q} : V/W \to \tilde{V}$ sowohl eine Rechts- als auch eine Linksinverse und ist somit bijektiv. Aufgrund der universellen Eigenschaft ist $\overline{q}$ durch p und q eindeutig bestimmt.

Das zugehörige Diagramm ist

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[dl, "q"'] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "q"] & \\
\tilde{V} \arrow[r, "\overline{p}"'] \arrow[rr, bend right, "\overline{q}\circ\overline{p}"'] & V/W \arrow[r, "\overline{q}"'] & \tilde{V}
\end{tikzcd}$$

6. Wir bezeichnen mit $\mathbf{0} : X \to V$ die Abbildung $\mathbf{0}(x) = 0_V$ für alle $x \in X$.

a) **"$\Rightarrow$":** Wenn $W_{x,v}$ ein Unterraum ist, dann ist $\mathbf{0} \in W_{x,v}$. Aus $0_V = \mathbf{0}(x) = v$ folgt $v = 0$.

"$\Leftarrow$": $\mathbf{0}(x) = 0_V$, also $\mathbf{0} \in W_{x,0_V}$. Seien $f, g \in W_{x,0_V}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann ist

$$(f - \lambda \cdot g)(x) = f(x) - \lambda \cdot g(x) = 0_V - \lambda \cdot 0_V = 0_V$$

und folglich $f - \lambda \cdot g \in W_{x,0_V}$. Also ist $W_{x,0_V}$ ein Unterraum.

b) Sei $U = \{h \in W \mid \exists v \in V \forall y \in X : h(y) = v\}$ die Menge der konstanten Funktionen. U ist ein Unterraum, da $\mathbf{0}$ eine konstante Funktion ist und da die Summe und das skalare Vielfache konstaner Funktionen konstant ist. Sei $f \in W$ beliebig, und sei $f_x \in W$ definiert durch

$$f_x(y) := f(y) - f(x) \quad (y \in X)$$

Dann ist $f_x(x) = f(x) - f(x) = 0_V$ und also $f_x \in W_{x,0_V}$. Sei $h_{f(x)} \in W$ definiert durch

$$h_{f(x)}(y) := f(x) \quad (y \in X)$$

Dann ist $h_{f(x)} \in U$ und es gilt

$$\forall y \in X : \; f_x(y) + h_{f(x)}(y) = \big(f(y) - f(x)\big) + f(x) = f(y)$$

Folglich ist $f = f_x + h_{f(x)}$. Da $f \in W$ beliebig war, haben wir also gezeigt, dass $W = W_{x,0_V} + U$. Sei $h \in W_{x,0_V} \cap U$, dann ist $h(x) = 0_V$ wegen $h \in W_{x,0_V}$ und $h(y) = h(x)$ für alle $y \in X$, wegen $h \in U$. Also ist $h(y) = 0_V$ für alle $y \in X$ und folglich $W_{x,0_V} \cap U = \mathbf{0}$.

c) Wir definieren eine Abbildung $\mathrm{ev}_x : W \to V$ durch $\mathrm{ev}_x(f) = f(x)$. Die Abbildung ist linear, denn per definitionem gilt für $f, g \in W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\mathrm{ev}_x(f - \lambda \cdot g) = (f - \lambda \cdot g)(x) = f(x) - \lambda g(x) = \mathrm{ev}_x(f) - \lambda \mathrm{ev}_x(g).$$

Siehe nächstes Blatt!

Per definitionem ist $\mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_x) = W_{x,0_V}$ und somit existiert eine eindeutig bestimmte injektive, lineare Abbildung $\overline{\mathrm{ev}_x} : W/W_{x,0_V} \to V$, sodass gilt

$$\overline{\mathrm{ev}_x}(f + W_{x,0_V}) = \mathrm{ev}_x(f) = f(x) \quad (f \in W).$$

Wir zeigen, dass $\overline{\mathrm{ev}_x}$ surjektiv ist. Sei $v \in V$ beliebig, und sei $h_v \in W$ die konstante Funktion definiert durch $h_v(y) = v$ für alle $y \in X$. Dann ist

$$v = h_v(x) = \mathrm{ev}_x(h_v) = \overline{\mathrm{ev}_x}(h_v + W).$$

Da v beliebig war, folgt die Surjektivität von $\overline{\mathrm{ev}_x}$. Dies beweist die Behauptung.