Serie 6:
Lineare Abbildungen, Quotientenräume

1. Im Folgenden seien V, W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $T : V \to W$ heisst *linear*, falls für alle $v_1, v_2 \in V$ und für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned} T(v_1 + v_2) &= T(v_1) + T(v_2), \\ T(\lambda v_1) &= \lambda T(v_1). \end{aligned}$$

a) Sei $T : V \to W$ linear. Dann ist $T(0_V) = 0_W$.

b) Sei $T : V \to W$ eine Abbildung, dann ist T genau dann linear, falls für alle $v_1, v_2 \in V$ und für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$T(v_1 - \lambda v_2) = T(v_1) - \lambda T(v_2).$$

c) Sei $T : V \to W$ linear, dann sind

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(T) &= \{v \in V \mid T(v) = 0_W\}, \\ \mathrm{Im}(T) &= \{w \in W \mid \exists v \in V : T(v) = w\} \end{aligned}$$

Unterräume.

d) Sei $T : V \to W$ eine Abbildung und nehmen Sie an, dass für ein $w \in W \setminus \{0_W\}$ die Menge $T^{-1}(\{w\})$ ein Unterraum ist. Zeigen Sie, dass T nicht linear ist.

2. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, und sei W ein Unterraum. Definieren Sie die folgende Relation $R \subset V \times V$:

$$v_1 R v_2 :\Leftrightarrow v_1 - v_2 \in W$$

a) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation definiert.

Bitte wenden!

b) Gegeben $v \in V$, sei $[v] \in V/\sim$ die Äquivalenzklasse von v. Definieren Sie auf $V/\sim$ eine Addition

$$[v_1] + [v_2] := [v_1 + v_2] \qquad \text{für } [v_1], [v_2] \in V/\sim$$

sowie eine skalare Multiplikation

$$\lambda \cdot [v] := [\lambda \cdot v] \qquad \text{für } \lambda \in \mathbb{K} \text{ und } [v] \in V/\sim$$

Zeigen Sie, dass diese Verknüpfungen wohldefiniert sind und dass $V/\sim$ mit diesen Verknüpfungen ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist.

c) Finden Sie eine bijektive, lineare Abbildung $T : V/W \to V/\sim$.

Bemerkung: Die Existenz einer bijektiven linearen Abbildung zeigt, dass die Mengen V/W und $V/\sim$ zusammen mit ihren Vektorraumstrukturen informal "bis auf Umbenennung der Elemente gleich" sind, wobei die Umbenennung gegeben ist durch $v \in V \mapsto T(v) \in W$. Ein Paar zweier Vektorräume mit einer bijektiven linearen Abbildung dazwischen heisst *isomorph* und die Abbildung ist ein *Isomorphismus*.

3. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$.

a) Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. Zeigen Sie, dass ein Unterraum $U \subset V$ existiert, so dass $W \oplus U = V$.

b) Seien $W_1, W_2 \subset V$ Unterräume von V. Zeigen Sie, dass $W_1 \cup W_2 \subseteq V$ genau dann ein Unterraum ist, wenn $W_1 \subseteq W_2$ oder $W_2 \subseteq W_1$ gilt.

***c)** Sei $\mathcal{V}$ die Menge der Unterräume von V und sei auf V eine Relation $\approx$ definiert wie folgt: Für zwei Unterräume $W_1, W_2 \in \mathcal{V}$ schreiben wir $W_1 \approx W_2$, falls ein Unterraum $U \in \mathcal{V}$ existiert, sodass $V = W_i \oplus U$ gilt für $i = 1, 2$.

Verwenden Sie Teilaugabe b) um zu zeigen, dass $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{V}$ definiert und bestimmen Sie die Äquivalenzklassen.

4. Seien $V := M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und

$$W_1 := \{A \in V \mid A = A^T\}$$
$$W_2 := \{A \in V \mid A = -A^T\}$$

Zeigen Sie, dass V/W_1 und W_2 isomorph sind, indem Sie explizit eine bijektive lineare Abbildung (einen Isomorphismus) $T : V/W_1 \to W_2$ konstruieren.

Siehe nächstes Blatt!

5. Seien V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, $W \subset V$ ein Unterraum. Wir bezeichnen mit $p : V \to V/W$ die *kanonische Projektion* $p(v) = v + W$.

a) Zeigen Sie, dass p eine surjektive lineare Abbildung ist, mit Kern $\mathrm{Ker}(p) = W$.

$^\heartsuit$**b)** Zeigen Sie die folgende Aussage. Sei U ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $T : V \to U$ ein Homomorphismus, sodass $W \subseteq \mathrm{Ker}(T)$ gilt. Dann existiert ein eindeutiger Homomorphismus $\overline{T} : V/W \to U$ mit der Eigenschaft $\overline{T} \circ p = T$.

$^\heartsuit$**c)** Zeigen Sie, dass der Quotientenraum $(V/W, p)$ die folgende universelle Eigenschaft erfüllt und dadurch bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt ist:

UE: Sei U ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $T : V \to U$ ein Homomorphismus, sodass $W = \mathrm{Ker}(T)$ gilt. Dann existiert ein eindeutiger injektiver Homomorphismus $\overline{T} : V/W \to U$ mit der Eigenschaft $\overline{T} \circ p = T$.

Bemerkung: Dass $(V/W, p)$ bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt ist, heisst folgendes: Angenommen $\tilde{V}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $q : V \to \tilde{V}$ ist linear mit der Eigenschaft, dass für jede lineare Abbildung $T : V \to U$ von V in einen $\mathbb{K}$-Vektorraum U mit $W = \mathrm{Ker}(T)$ eine eindeutige injektive lineare Abbildung $\overline{T} : \tilde{V} \to U$ existiert, so dass $T = \overline{T} \circ q$ gilt. Dann existiert eine eindeutige bijektive lineare Abbildung $\overline{q} : V/W \to \tilde{V}$, sodass gilt $q = \overline{q} \circ p$.

6. Sei X eine Menge, V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, und $\mathrm{Abb}(X, V)$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum aller Abbildungen von X nach V, mit punktweiser Addition

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad (x \in X, f, g \in \mathrm{Abb}(X, V))$$

und punktweiser skalarer Multiplikation

$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x) \quad (x \in X, f \in \mathrm{Abb}(X, V), \lambda \in \mathbb{K})$$

Im Folgenden bezeichnen wir $W = \mathrm{Abb}(X, V)$. Seien $x \in X$ und $v \in V$, sowie $W_{x,v} := \{f \in W \mid f(x) = v\}$.

a) Zeigen Sie, dass $W_{x,v}$ genau dann ein Unterraum ist, wenn $v = 0_V$.

b) Finden Sie einen Unterraum $U \subset W$, so dass $W = W_{x,0_V} \oplus U$.

c) Zeigen Sie, dass $W/W_{x,0_V}$ und V isomorph sind.

7. Online-Abgabe

Bitte wenden!

1. Sei V ein Vektorraum, $W_1, W_2 \subseteq V$ Unterräume. Seien $\{w_1, \dots, w_m\}$ und $\{u_1, \dots, u_l\}$ Basen von W_1 bzw. W_2. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Sei $V = W_1 + W_2$. Dann ist $V/W_1 = \langle u_1 + W_1, \dots, u_l + W_1 \rangle$.

(b) Sei $V = W_1 \oplus W_2$. Dann ist $\{w_1 + W_2, \dots, w_m + W_2\} \subseteq V/W_2$ linear unabhängig.

(c) Keine der Aussagen ist richtig.

2. Sei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit drei Elementen. Sei $W \subseteq \mathbb{F}_3^2$ der Unterraum $W = \langle (1,1) \rangle$. Dann hat $\mathbb{F}_3^2/W$ drei Elemente.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

3. Sei V ein Vektorraum und sei $S \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann ist $\langle S \rangle$ der Durchschnitt aller Unterräume von V, die S enthalten.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

4. *Prüfung Winter 2017:* Sei W ein Unterraum eines Vektorraumes V und seien $v, v' \in V$ mit $v \neq v'$. Es ist möglich, dass die Nebenklasse $v + W$ in $v' + W$ enthalten ist.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

5. *Prüfung Winter 2017:* Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $W \subset V$ ein nicht-trivialer Unterraum. So ist

$$\dim(V/W) = \frac{\dim(V)}{\dim(W)}.$$

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Donnerstag, den 2. November 10:00 Uhr vormittags im Raum HG J 68, in einem der Fächer beschriftet mit *Abgabe*.