Serie 7:
Lineare Abbildungen: Kern, Bild, Rang und Darstellung durch Matrizen

1. Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen linear sind.

a) Gegeben ein Vektorraum V über $\mathbb{K}$, die Abbildung $\mathrm{id}_V : V \to V$, $\mathrm{id}_V(v) := v$.

b) Gegeben Vektorräume V, W über $\mathbb{K}$, die Abbildung $\mathbf{0} : V \to W$, $v \mapsto 0_W$.

c) Gegeben $\varphi \in \mathbb{R}$ die Abbildung $r_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$r_\varphi(x, y) := \big((\cos\varphi)x + (-\sin\varphi)y, (\sin\varphi)x + (\cos\varphi)y\big) \quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Können Sie diese Abbildung interpretieren?

d) Gegeben eine Gerade $g \in \mathbb{R}^2$ durch den Ursprung, die Spiegelung $s_g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ entlang der Geraden.

e) Die Projektion $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ auf die xy-Ebene in $\mathbb{R}^3$, d.h. $P(x, y, z) := (x, y, 0)$ für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

2. Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$.

a) Sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und sei $\dim V = \dim W$. Beweisen Sie

$$T \text{ ist injektiv} \Leftrightarrow T \text{ ist surjektiv}$$

Zeigen Sie, dass keine der beiden Implikationen gilt, wenn die Voraussetzung der Linearität fallen gelassen wird.

b) Sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ injektiv, $S \subset V$. Beweisen Sie

$$S \text{ ist linear unabhängig} \Leftrightarrow T(S) \text{ ist linear unabhängig}$$

Bitte wenden!

$^\heartsuit$**3.** Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$. Ein Endomorphismus $P \in \mathrm{End}(V)$ heisst *idempotent* oder *Projektion*, falls $P^2 = P$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Wenn $P \in \mathrm{End}(V)$ idempotent ist, dann ist

$$V = \mathrm{Ker}(P) \oplus \mathrm{Im}(P)$$

b) Seien $W_1, W_2 \subset V$ Unterräume so dass $V = W_1 \oplus W_2$. Dann existiert eine Projektion $P \in \mathrm{End}(V)$ so dass

$$W_1 = \mathrm{Ker}(P) \quad \text{und} \quad W_2 = \mathrm{Im}(P)$$

4. Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$, sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und sei $W' \subset W$ ein Unterraum. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Das Urbild $T^{-1}(W')$ ist ein Unterraum von V.

b) Es gilt

$$\dim T^{-1}(W') = \mathrm{nullity}(T) + \dim(\mathrm{Im}(T) \cap W')$$

5. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$, $W \subset V$ ein Unterraum. Zeigen Sie unter Verwendung der kanonischen Projektion, dass gilt

$$\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$$

6. Wir geben in dieser Aufgabe einen geometrischen Beweis für die folgende Aussage: Sei $r \in \mathbb{Q}$ eine von Null verschiedene rationale Zahl. Dann existieren eindeutige, teilerfremde $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$, sodass $r = \frac{p}{q}$ gilt.

a) Sei $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gegeben durch $r = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Finden Sie eine lineare Abbildung $l_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sodass gilt

$$\mathrm{Ker}(l_r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0 \wedge r = \tfrac{x}{y}\} \cup \{(0, 0)\}$$

b) Wir erinnern daran, dass zwei ganze Zahlen p, q teilerfremd sind, falls gilt:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : n \mid p \wedge n \mid q \implies n \in \{\pm 1\}.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ genau ein Tupel $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mit teilerfremden Einträgen existiert, sodass $r = \frac{p}{q}$ gilt.

7. Online-Abgabe

Siehe nächstes Blatt!

1. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x + y, 2x, 0)$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x + y, 2x, 1)$.

(c) $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$, $(x, y, z) \mapsto (\alpha x + \beta y + \gamma z, \delta x + \varepsilon y + \eta z)$ für fixe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$ im Körper $\mathbb{K}$.

Bitte wenden!

2. Sei $T \in \mathrm{End}(P_4(\mathbb{R}))$ gegeben durch

$$T(p(x)) := (x+1)p'(x) \quad \text{für } p(x) \in P_4(\mathbb{R})$$

Gegeben seien die folgenden geordneten Basen von $P_4(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3, x^4) \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = (1, x+1, x^2, x^3, (x+1)^4)$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(e) $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 12 & -12 & -24 & 12 & 4 \end{pmatrix}$

(f) $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Siehe nächstes Blatt!

(g) $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 12 & -16 & -24 & -12 & 4 \end{pmatrix}$

(h) $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

3. Im Folgenden bezeichnen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ geordnete Basen von $\mathbb{R}^2$, und bezeichne $\mathcal{E}_2 = (e_1, e_2)$ die Standardbasis. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Falls $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{E}_2$, dann ist f eine Drehung um den Ursprung $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Falls $\mathcal{B} = \mathcal{E}_2$ und $\mathcal{C} = (e_2, -e_1)$, dann ist f eine Punktspiegelung im Ursprung $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Falls $\mathcal{B} = \mathcal{E}_2$ und $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, dann ist $\mathcal{C} = (-e_2, e_1)$.

(d) Falls $\mathcal{C} = \mathcal{E}_2$ und f die Spiegelung an der y-Achse ist, dann ist $\mathcal{B} = (e_2, e_1)$.

4. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V. Die Abbildung $V \to \mathbb{K}^{\dim V}$, die jedem Vektor $v \in V$ den Koordinatenvektor $[v]_{\mathcal{B}}$ zuordnet, ist linear.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear, und seien $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ sowie $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$. Dann ist $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$.

(c) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Dann ist f bijektiv.

Bitte wenden!

5. Zu welcher Abbildung ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasen?

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (2x + y, x, 2y)$.

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (2x + y, x + 2z)$.

6. Seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume mit geordneten Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$, $n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$ und sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. So ist $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ eine $n \times m$ -Matrix.

(a) richtig

(b) falsch

7. *Prüfung Winter 2017:* Seien $T : V \to W$ linear und $v_1, \ldots, v_n \in V$ mit $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ linear unabhängig. Dann ist die Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

8. *Prüfung Winter 2017:* Seien V und W Vektorräume, $v_1, v_2 \in V$ und $w_1, w_2 \in W$ beliebig. Dann existiert eine lineare Abbildung $T : V \to W$ mit $T(v_1) = w_1$ und $T(v_2) = w_2$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

9. *Prüfung Winter 2017:* Sei $T : V \to W$ linear. Falls das Bild von T eine Basis von W enthält, ist T surjektiv.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

10. *Prüfung Winter 2017:* Jeder Unterraum eines Vektorraumes V ist der Kern einer linearen Abbildung $T : V \to W$ für einen geeigneten Vekorraum W.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

11. *Prüfung Sommer 2017:* Sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann gilt: T ist injektiv genau dann, wenn $\mathrm{Ker}(T) = \{0_V\}$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Donnerstag, den 9. November 10:00 Uhr vormittags im Raum HG J 68, in einem der Fächer beschriftet mit *Abgabe*.