

Serie 8:

Komposition, Matrixmultiplikation, Invertierbarkeit, Isomorphismen

1. a) Seien U, V, W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$ und seien $S \in \text{Hom}(V, W)$ und $T \in \text{Hom}(U, V)$. Zeigen Sie, dass $S \circ T$ linear ist.
- b) Seien U, V, W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$ und seien $S \in \text{Hom}(V, W)$, $T \in \text{Hom}(U, V)$. Zeigen Sie, dass für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $S \circ (\lambda T) = (\lambda S) \circ T = \lambda(S \circ T)$.
- c) Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Zeigen Sie, dass $\text{End}(V)$ versehen mit der punktweisen Addition und mit der Komposition ein Ring mit Einselement ist.
- d) Sei R ein nicht-trivialer Ring mit Einselement $1_R \neq 0_R$. Sei $R^\times$ die Menge der Einheiten in R , d.h.

$$R^\times = \{r \in R \mid \exists s \in R : s \cdot r = r \cdot s = 1_R\}.$$

Zeigen Sie, dass $R^\times$ mit der Ringmultiplikation eine Gruppe ist.

- e) Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass die Menge $\text{GL}(V)$ der bijektiven Endomorphismen versehen mit der Komposition eine Gruppe ist.

2. Betrachten Sie die folgenden Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $A(2B + 3C)$, $(AB)D$ und $A(BD)$.

♥3. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- a) Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Falls A invertierbar ist, dann ist die Inverse A^{-1} von A eindeutig.
- b) Seien $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ und sei $AB = I_n$. Dann ist A invertierbar und $A^{-1} = B$.
- c)
 - Es ist $(AB)^T = B^T A^T$.
 - Falls A invertierbar ist, dann ist A^T invertierbar und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
 - Falls A, B invertierbar sind, dann ist AB invertierbar und $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

4. a) Zeigen Sie, dass *Isomorphie* eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Vektorräume definiert,¹ d.h. wenn V, W, U Vektorräume sind, dann gelten

$$\begin{array}{ll} V \cong V & \text{(Reflexivität)} \\ V \cong W \implies W \cong V & \text{(Symmetrie)} \\ V \cong W, W \cong U \implies V \cong U & \text{(Transitivität)} \end{array}$$

b) Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $T \in \text{Hom}(V, W)$. Beweisen Sie

1. T ist genau dann injektiv, wenn T eine lineare Linksinverse besitzt, d.h. es gibt $S \in \text{Hom}(W, V)$ so dass $ST = \text{id}_V$.
2. T ist genau dann surjektiv, wenn T eine lineare Rechtsinverse besitzt, d.h. es gibt $S \in \text{Hom}(W, V)$ so dass $TS = \text{id}_W$.

5. Betrachten Sie den Endomorphismus $L_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

- a) Zeigen Sie, dass $L_A^2 := L_A \circ L_A \neq 0$, aber $L_A^3 := L_A^2 \circ L_A = 0$.
- b) Finden Sie eine Basis $\{u, v, w\}$ von $\mathbb{R}^3$ mit $L_A(u) = 0$, $L_A(v) = u$, $L_A(w) = v$ und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $[L_A]_{\mathcal{B}}$ bezüglich $\mathcal{B} := (u, v, w)$.
- c) Bestimmen Sie $\text{Ker}(A)$ und $\text{Im}(A)$.

¹Die Aufgabenstellung ist ungenau, da die Menge aller Vektorräume nicht existiert (dies folgt aus Russells Paradox zusammen mit der Tatsache, dass man auf jeder unendlichen Menge eine Vektorraumstruktur definieren kann). Wir können aber dennoch zeigen, dass Isomorphie die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität besitzt.

- *6. Im Folgenden sei $\mathbb{K}$ ein Körper in dem $2 := 1 + 1$ invertierbar ist, V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} \subseteq V$ eine Basis von V und seien $a, b \in \mathbb{K}^\times := \mathbb{K} \setminus \{0\}$ fix.

a) Definieren Sie eine assoziative Verknüpfung $\cdot : V \times V \rightarrow V$ durch

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \cdot v &= v \cdot \mathbf{1} = v && \text{für alle } v \in V \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &:= a\mathbf{1} && \text{und } \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} := \mathbf{k} \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} &:= b\mathbf{1} && \text{und } \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} := -\mathbf{k} \end{aligned} \quad (\star)$$

bilinear fortgesetzt auf $V \times V$, d.h. die Abbildung $(v, w) \mapsto v \cdot w$ ist in beiden Argumenten linear bzw. für alle $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$, für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gelten

$$\begin{aligned} (v_1 + \lambda v_2) \cdot w_1 &= v_1 \cdot w_1 + \lambda(v_2 \cdot w_1) \\ v_1 \cdot (w_1 + \lambda w_2) &= v_1 \cdot w_1 + \lambda(v_1 \cdot w_2) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Verknüpfung durch die Assoziativität und die Relationen in $(\star)$ eindeutig definiert ist. Wir bezeichnen im Folgenden mit $H_{a,b}(\mathbb{K})$ den (durch $\mathbb{K}$ und a, b bis auf Isomorphie vollständig bestimmten) Ring $(V, +, \cdot)$.

b) Definieren Sie auf $H_{a,b}(\mathbb{K})$ eine Abbildung $\bar{\cdot} : H_{a,b}(\mathbb{K}) \rightarrow H_{a,b}(\mathbb{K})$ durch

$$\overline{x_1\mathbf{1} + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k}} := x_1\mathbf{1} - x_2\mathbf{i} - x_3\mathbf{j} - x_4\mathbf{k}$$

und zeigen Sie, dass $\bar{\cdot}$ eine $\mathbb{K}$ -lineare Involution ist (also $\overline{\bar{v}} = v$ für beliebige $v \in V$) und dass gilt $\overline{v \cdot w} = \bar{w} \cdot \bar{v}$ ($v, w \in H_{a,b}(\mathbb{K})$).

c) Definieren Sie die Norm auf $H_{a,b}(\mathbb{K})$ durch $N(x) := x \cdot \bar{x}$ und zeigen Sie, dass $N(xy) = N(x) \cdot N(y)$. Berechnen Sie $N(x)$ explizit.[†] Zeigen Sie, dass ein Element in $H_{a,b}(\mathbb{K})$ genau dann eine multiplikative Inverse besitzt, wenn $N(x) \neq 0$.

[†]Hinweis: Um viel Zeit zu sparen, zeigen Sie zuerst, dass für alle $x \in H_{a,b}(\mathbb{K})$ gilt $N(x) \in \langle \mathbf{1} \rangle$.

d) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und seien $a = b = -1$. Zeigen Sie, dass $H_{-1,-1}(\mathbb{R})$ ein Schiefkörper ist, d.h. jedes von 0 verschiedene Element in $H_{-1,-1}(\mathbb{R})$ besitzt eine multiplikative Inverse.

Bemerkung: $H_{-1,-1}(\mathbb{R})$ ist die Menge der Hamiltonquaternionen, üblicherweise bezeichnet mit $\mathbb{H}$.

e) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, sei $b = p$ prim in $\mathbb{N}$ und sei a kein Quadrat mod p , d.h. für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $a - k^2 \not\equiv 0 \pmod{p}$. Zeigen Sie, dass $H_{a,p}(\mathbb{Q})$ ein Schiefkörper ist.

7. Online-Abgabe

Bitte wenden!

1. Gegeben seien Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Ausdrücke ist nicht definiert?

(a) CA^T

(b) $B^T A$

(c) $C^T B$

(d) $B^T C^T$

(e) AC^T

2. (Zwischenprüfung Frühjahr 2015) Welcher der folgenden fünf Ausdrücke ist **nicht** identisch zu dem Ausdruck $(A + B)^2$ für beliebige quadratische Matrizen derselben Grösse A und B ?

(a) $A^2 + 2AB + B^2$

(b) $(A + B)(B + A)$

(c) $(B + A)^2$

(d) $A(A + B) + B(A + B)$

(e) $A^2 + AB + BA + B^2$

Siehe nächstes Blatt!

3. Betrachten Sie die linearen Abbildungen $T, S_1, S_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ x \end{pmatrix}, \quad S_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}, \quad S_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Dann gilt

- (a) $T = S_2 \circ S_1$
- (b) $T = S_1 \circ S_2$
- (c) keins von beiden
- (d) beide

4. Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$ und sei $T : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ geordnete Basen für V und W . So gilt $[T^2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = ([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^2$.

- (a) richtig
- (b) falsch

5. Sei $T : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung und $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ geordnete (endliche) Basen für V und W . So gilt

$$([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

- (a) richtig
- (b) falsch

6. $AB = I \implies A$ und B sind invertierbar.

- (a) richtig
- (b) falsch

Bitte wenden!

7. Die Menge der invertierbaren Matrizen in $M_{n \times n}(\mathbb{K})$ ist ein Unterraum von $M_{n \times n}(\mathbb{K})$.

(a) Wahr

(b) Falsch

8. Prüfung Winter 2017: Seien U, V, W Vektorräume mit geordneten Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$. Gegeben seien lineare Abbildungen $T : U \rightarrow V$ und $S : V \rightarrow W$, dann gilt

$$[S \circ T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} [S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}.$$

(a) Wahr.

(b) Falsch.

9. Prüfung Sommer 2017: Seien $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Dann ist $\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = Bx\}$ ein Unterraum von $\mathbb{K}^n$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

10. Prüfung Sommer 2017: Die Abbildung $T : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ gegeben durch $T(f) = f'$ ist linear.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

11. Prüfung Sommer 2017: Sei $T \in \text{Hom}(V, W)$. Dann gilt: T ist injektiv genau dann, wenn $\text{Ker}(T) = \{0_V\}$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Siehe nächstes Blatt!

12. Prüfung Sommer 2017: Die einzige reelle 2×2 Matrix A , die $A^2 = 0$ erfüllt, ist $A = 0$.

- (a) Wahr.
- (b) Falsch.

13. Prüfung Sommer 2017: Seien $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Dann gilt: $AB = I_n \implies BA = I_n$.

- (a) Wahr.
- (b) Falsch.

14. Prüfung Sommer 2017: Seien $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Dann gilt: $AB = 0 \implies BA = 0$.

- (a) Wahr.
- (b) Falsch.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Donnerstag, den 16. November 10:00 Uhr vormittags im Raum HG J 68, in einem der Fächer beschriftet mit *Abgabe*.