Serie 9:
Basiswechsel & Dualraum

1. **a)** Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z)^T \mapsto x - y + z$. Dann ist f linear, da $f = L_{(1,-1,1)}$ und $E = \mathrm{Ker}(f)$, also ist E ein Unterraum. Wir bemerken, dass $f \neq 0$, da $f(1, 0, 0)^T = 1$. Folglich ist $\mathrm{Rang}(f) \geq 1$ und da $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}$, folgt $\mathrm{Rang}(f) = 1$. Also ist $\dim E = \dim \mathbb{R}^3 - \mathrm{Rang}(f) = 2$.

b) Gegeben $v = (x, y, z)^T, v' = (x', y', z')^T \in \mathbb{R}^3$, schreiben wir

$$(v, v') := xx' + yy' + zz'$$

Seien $v'' = (x'', y'', z'')^T \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist

$$\begin{aligned}(v, v' + \lambda v'') &= x(x' + \lambda x'') + y(y' + \lambda y'') + z(z' + \lambda z'') \\ &= xx' + yy' + zz' + \lambda(xx'' + yy'' + zz'') \\ &= (v, v') + \lambda(v, v'')\end{aligned}$$

Also ist (v, v') linear in der zweiten Komponente.

Sei $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von E (vgl. Teilaufgabe a)). Dann impliziert die obige Rechnung, dass $v \in E^\perp$ genau dann, wenn $(v, v_1) = (v, v_2) = 0$. Dasselbe Argument angewendet auf die erste Komponente zeigt, dass die Abbildungen $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_1 : v \mapsto (v, v_1)$ und $f_2 : v \mapsto (v, v_2)$ linear sind, und also $E^\perp = \mathrm{Ker}(f_1) \cap \mathrm{Ker}(f_2)$. Da $v_1, v_2 \neq 0$, sind f_1, f_2 nicht-trivial: gegeben k existiert ein $1 \leq i \leq 3$ so dass $f_k(e_i) \neq 0$; sei nämlich i so gewählt, dass die i-te Komponente von v_k nicht 0 ist, dann ist $f_k(e_i)$ gleich der i-ten Komponente von v_k und somit ist $f_k \neq 0$. Dies zeigt, dass $\dim \mathrm{Ker}(f_1) = \dim \mathrm{Ker}(f_2) = 2$ und daraus folgt

$$\begin{aligned}\dim E^\perp &= \dim \big(\mathrm{Ker}(f_1) \cap \mathrm{Ker}(f_2)\big) \\ &= \dim \mathrm{Ker}(f_1) + \dim \mathrm{Ker}(f_2) - \dim(\underbrace{\mathrm{Ker}(f_1) + \mathrm{Ker}(f_2)}_{\subseteq \mathbb{R}^3}) \geq 1\end{aligned}$$

Bitte wenden!

Angenommen $v = (x, y, z) \in E \cap E^\perp$, dann ist

$$0 = (v, v) = x^2 + y^2 + z^2$$

und folglich $v = 0$. Also ist

$$\dim(E + E^\perp) = \dim E + \dim E^\perp - \dim(E \cap E^\perp) \geq 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

und es folgt $\mathbb{R}^3 = E \oplus E^\perp$. Man beachte, dass dies zeigt, dass

$$\dim E^\perp = \dim(E \oplus E^\perp) - \dim E = \dim \mathbb{R}^3 - 2 = 1$$

c) Wir hatten in Serie 7 gezeigt, dass $w = P_E(v)$ genau dann, wenn $w \in E$ und $v - P_E(v) \in E^\perp$. Daraus folgt, dass $P_E(v) = v$ für alle $v \in E$. Sei also $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von E, dann ist $P_E(v_1) = v_1$ und $P_E(v_2) = v_2$. Falls $\{v_3\}$ eine Basis von $E^\perp$, dann ist $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und $[P_E]_\mathcal{B}$ hat die gewünschte Form. Es bleibt, v_1, v_2, v_3 explizit zu bestimmen.

Man überprüft leicht, dass z. B. $v_1 = (1, 2, 1)$ und $v_2 = (1, 0, -1)$ in E liegen. Für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ gilt

$$0 = (\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1, \lambda_1 - \lambda_2)$$

und folglich $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Also ist $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von E.

Wir wählen $v_3 = (-2, 2, -2)$, d.h. $v_3 = v_1 \times v_2$, wobei $\times$ das in der Schule diskutierte Kreuzprodukt beschreibt. Dann ist $v_3 \in E^\perp$. Alternativ bestimmt man den Vektor $v_3 = (x, y, z)$ als eine der Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 0 = ((x, y, z), v_1) =& x + 2y + z \\ 0 = ((x, y, z), v_1) =& x - z \end{aligned}$$

Wie eingangs beschrieben, ist $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis für die gilt

$$[P_E]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beachte, dass $\mathcal{B}$ in keiner Weise eindeutig ist. Beispielsweise ist $\{v_3'\}$ gegeben durch $v_3' = (1, -1, 1)$ ebenfalls eine Basis von $E^\perp$. Also gilt für $\mathcal{B}' := (v_1, v_2, v_3')$ ebenfalls

$$[P_E]_{\mathcal{B}'} = [P_E]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

d) Wir verwenden $[P_E]_{\mathcal{E}_3} = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}}[P_E]_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_3}$. Es gilt sicherlich

$$[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Für die Umkehrung des Basiswechsels überlegen wir uns, dass für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 \end{pmatrix}$$

Wir lösen nun $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = e_j$ für $j = 1, 2, 3$ und erhalten

$$[e_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad [e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad [e_3]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} [P_E]_{\mathcal{E}_3} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bemerkung: Diese Matrix hätte man nahezu unmöglich direkt berechnen können. Die Verwendung von Basiswechselmatrizen erscheint auf den ersten Blick vielleicht als Umweg, sie macht das Argument im Grunde genommen aber relativ einfach und es gibt nur wenig Gelegenheit Fehler zu machen, insbesondere wenn wir später lernen $[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_3}$ direkt anhand von $[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}}$ zu bestimmen.

2. **a)** Nach Voraussetzung ist $\{p_0, \dots, p_d\}$ linear unabhängig. Sei $p \in \mathbb{R}_d[X]$, dann ist per definitionem

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_d x^d$$

punktweise, mit von x unabhängigen Koeffizienten. Also ist $\{p_0, \dots, p_d\}$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von $\mathbb{R}_d[X]$ und somit eine Basis.

Bitte wenden!

b) Wir wissen aus der Analysisvorlesung, dass

$$(x+1)^k = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^r \quad (k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

Wir wissen aus der vorangehenden Teilaufgabe, dass $\dim \mathbb{R}_d[X] = d+1$, und folglich reicht es zu zeigen, dass $\{q_0, \dots, q_d\}$ linear unabhängig ist.

Seien $\alpha_0, \dots, \alpha_d \in \mathbb{K}$ mit

$$0 = \alpha_0 q_0 + \dots + \alpha_d q_d$$

Dann ist punktweise

$$\begin{aligned} 0 =& \alpha_0(x+1)^0 + \dots + \alpha_d(x+1)^d \\ =& \sum_{k=0}^{d} \alpha_k \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^r \\ \overset{(*)}{=}& \sum_{r=0}^{d} \left(\sum_{k=r}^{d} \alpha_k \binom{k}{r} \right) x^r \end{aligned}$$

Da $\{p_0, \dots, p_d\}$ linear unabhängig sind, folgt also

$$0 = \sum_{k=r}^{d} \alpha_k \binom{k}{r} \quad (0 \le r \le d)$$

und insbesondere $0 = \sum_{k=d}^{d} \alpha_k \binom{k}{d} = \alpha_d$. Sei nun $0 < r \le d$ gegeben und angenommen wir wissen bereits, dass $\alpha_r, \dots, \alpha_d = 0$. Dann ist

$$0 = \sum_{k=r-1}^{d} \alpha_k \binom{k}{r-1} = \alpha_{r-1} + \sum_{k=r}^{d} \alpha_k \binom{k}{r-1} = \alpha_{r-1}$$

und somit folgt $0 = \alpha_0 = \dots = \alpha_d$ per Induktion.

Die Gleichheit $(*)$ beweist man mittels Induktion. Falls $d = 0$, dann gilt sicherlich

$$\sum_{k=0}^{d} \alpha_k \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^r = \alpha_0 = \sum_{r=0}^{d} \left(\sum_{k=r}^{d} \alpha_k \binom{k}{r} \right) x^r$$

Angenommen, die Gleichheit gilt für d, dann berechnen wir

$$\sum_{k=0}^{d+1} \alpha_k \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^r = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^r + \alpha_{d+1} \sum_{r=0}^{d+1} \binom{d+1}{r} x^r$$

Siehe nächstes Blatt!

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^{d} \left(\sum_{k=r}^{d} \alpha_k \binom{k}{r} \right) x^r + \alpha_{d+1} \sum_{r=0}^{d+1} \binom{d+1}{r} x^r \\
&= \sum_{r=0}^{d} \left(\sum_{k=r}^{d+1} \alpha_k \binom{k}{r} \right) x^r + \alpha_{d+1} \binom{d+1}{d+1} x^{d+1} \\
&= \sum_{r=0}^{d+1} \left(\sum_{k=r}^{d+1} \alpha_k \binom{k}{r} \right) x^r
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Wir werden später lernen, wie man dieses Problem mittels Lösung eines linearen Gleichungssystems lösen kann. Hierfür setzt man beispielsweise die Werte $0, \dots, d$ für x ein und zeigt dann, dass eine gewisse Matrix invertierbar ist.

c) Wie in der Analysisvorlesung ausführlich diskutiert wurde (siehe obige Formel), gelten

$$
\begin{aligned}
q_0 &= p_0 \\
q_1 &= p_0 + p_1 \\
q_2 &= p_0 + 2p_1 + p_2 \\
q_3 &= p_0 + 3p_1 + 3p_2 + p_3
\end{aligned}
$$

Folglich gelten

$$
[\mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]}]_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad [\mathrm{id}_{\mathbb{R}_3[X]}]_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Um die anderen Basiswechselmatrizen zu bestimmen, verwenden wir

$$
[\mathrm{id}_{\mathbb{R}_d[X]}]_{\mathcal{B}_d}^{\mathcal{C}_d} = ([\mathrm{id}_{\mathbb{R}_d[X]}]_{\mathcal{C}_d}^{\mathcal{B}_d})^{-1},
$$

Aufgabe 2b von Übungsblatt 8 und die Tatsache, dass die Inversen von $[\mathrm{id}_{\mathbb{R}_d[X]}]_{\mathcal{C}_d}^{\mathcal{B}_d}$ für $d = 2, 3$ relativ leicht zu erraten sind.

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow [\mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]}]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{C}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Bitte wenden!

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&-2&3\\0&0&1&-3\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [\mathrm{id}_{\mathbb{R}_3[X]}]_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{C}_3}=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&-2&3\\0&0&1&-3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Um die Inversen zu erraten, rät man zuerst, dass die Inverse einer oberen Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen sein muss. Dann multipliziert man zwei solche Matrizen, z. Bsp.

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a&b&c\\0&1&d&e\\0&0&1&f\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1+a&1+b+d&1+c+e+f\\0&1&2+d&3+e+2f\\0&0&1&3+f\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

und bestimmt dann die Koeffizienten.

Alternativ berechnet man wieder die Koeffizienten von p_j bezüglich $\mathcal{C}$, oder man verwendet beispielsweise das Gauss'sche Eliminationsverfahren, um die Inversen von $[\mathrm{id}_{\mathbb{R}_d[X]}]_{\mathcal{C}_d}^{\mathcal{B}_d}$ zu bestimmen. Diesen Algorithmus erlernen wir im weiteren Verlauf des Semesters.

d) Gegeben sei ein Polynom $p(x)=\sum_{k=0}^{d}\alpha_k x^k$. Dann ist

$$D(p)(x)=\sum_{k=0}^{d}k\alpha_k x^{k-1} \tag{$\star$}$$

wobei wir die Konvention $\frac{1}{0}=\infty$ und $0\cdot\infty=0$ verwenden. Seien $q(x)=\sum_{k=0}^{d'}\beta_k x^k$ und $\lambda\in\mathbb{R}$. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $d=d'$, indem wir, wenn nötig, die Darstellung von p bzw. q durch Monome höheren Grades mit Koeffizienten gleich 0 ergänzen. Dann ist $p+\lambda q$ ein Polynom und $(p+\lambda q)(x)=\sum_{k=0}^{d}\gamma_k x^k$ mit $\gamma_k=\alpha_k+\lambda\beta_k$. Also gilt

$$\begin{aligned}D(p+\lambda q)(x)=&\sum_{k=0}^{d}k\gamma_k x^{k-1}=\sum_{k=0}^{d}k(\alpha_k+\lambda\beta_k)x^{k-1}\\=&\sum_{k=0}^{d}(k\alpha_k+\lambda k\beta_k)x^{k-1}=\sum_{k=0}^{d}k\alpha_k x^{k-1}+\lambda\sum_{k=0}^{d}k\beta_k x^{k-1}\\=&D(p)+\lambda D(q)\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Dies zeigt, dass D linear ist.

Aus der Formel

$$D(p)(x) = \sum_{k=0}^{d} k\alpha_k x^{k-1}$$

folgt, dass $D(p) \in \mathrm{span}\{p_0, \ldots, p_{d-1}\}$ ist, falls $d \geq 1$ und $D(p) = 0$ sonst. Wegen Teilaufgabe a) und wegen $\deg(0) = -\infty \leq -1$ ist folglich $D(p) \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$ wann immer $d \geq 0$. Die Abbildung $D_d : \mathbb{R}_d[X] \to \mathbb{R}_{d-1}[X]$ gegeben durch $D_d(p) := D(p)$ ist also wohldefiniert.

e) Die Darstellungsmatrizen berechnen sich anhand der Formel ($\star$):

$$D(p_k) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k = 0 \\ kp_{k-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

Also ist

$$[D_4]^{\mathcal{B}_3}_{\mathcal{B}_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Um $[D_4]^{\mathcal{C}_3}_{\mathcal{C}_4}$ zu bestimmen, verwenden wir die Kettenregel

$$D(q_k)(x) = k(x+1)^{k-1}$$

Man überprüft die Formel in unserem Kontext direkt wie folgt:

$$\begin{aligned} D(q_k) =& D\left(\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^r\right) = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} D(x^r) \\ =& \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} r x^{r-1} = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k}{r+1} (r+1) x^r \\ =& \sum_{r=0}^{k-1} k \binom{k-1}{r} x^r = k(x+1)^{k-1} \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben

$$\begin{aligned} \binom{k}{r+1}(r+1) =& \frac{k!}{(r+1)!(k-(r+1))!}(r+1) \\ =& \frac{k!}{r!((k-1)-r)!} \\ =& k\frac{(k-1)!}{r!((k-1)-r)!} \end{aligned}$$

Bitte wenden!

$$=k\binom{k-1}{r}$$

Also ist $[D_4]_{\mathcal{C}_4}^{\mathcal{C}_3} = [D_4]_{\mathcal{B}_4}^{\mathcal{B}_3}$.

f) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
[D_4]_{\mathcal{B}_4}^{\mathcal{C}_3} =& [\mathrm{id}_{\mathbb{R}_3[X]}]_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{C}_3}[D_4]_{\mathcal{B}_4}^{\mathcal{B}_3} \\
=& \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

g) Wir schreiben $p = p_0 - 10p_1 + p_3$, und folglich ist $[p]_{\mathcal{B}_3} = (1, -10, 0, 1)^T$. Wir wissen

$$[T(p)]_{\mathcal{B}_2} = [T]_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_2}[p]_{\mathcal{B}_3} = A[p]_{\mathcal{B}_3}$$

Also gilt

$$[T(p)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 \\ -21 \\ -15 \end{pmatrix}$$

Und folglich ist

$$T(p) = -36 - 21x - 15x^2$$

3. Da $\dim V^* = 3$, reicht es zu zeigen, dass f_1, f_2, f_3 linear unabhängig sind. Seien also $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$0 = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$$

Das heisst, für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned}
0 =& \lambda_1(x - 2y) + \lambda_2(x + y + z) + \lambda_3(y - 3z) \\
=& x(\lambda_1 + \lambda_2) + y(-2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + z(\lambda_2 - 3\lambda_3)
\end{aligned}$$

Da dies für beliebige $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gilt, folgt nach Auswertung auf der Standardbasis, dass

$$\begin{aligned}
0 =& \lambda_1 + \lambda_2 && \text{(aus } (x, y, z) = e_1) \\
0 =& -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 && \text{(aus } (x, y, z) = e_2)
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$0 = \lambda_2 - 3\lambda_3 \qquad\qquad (\text{aus } (x,y,z) = e_3)$$

Einsetzen der ersten und dritten in die zweite Gleichung liefert

$$0 = 2\lambda_2 + \lambda_2 + \frac{1}{3}\lambda_2 = \frac{10}{3}\lambda_2$$

Also ist $\lambda_2 = 0$ und es folgt $-\lambda_1 = 3\lambda_3 = \lambda_2 = 0$. Folglich sind f_1, f_2, f_3 linear unabhängig.

Für die Basis $\mathcal{B}$ muss gelten

$$\begin{array}{lll} f_1(v_1) = 1 & f_2(v_1) = 0 & f_3(v_1) = 0 \\ f_1(v_2) = 0 & f_2(v_2) = 1 & f_3(v_2) = 0 \\ f_1(v_3) = 0 & f_2(v_3) = 0 & f_3(v_3) = 1 \end{array}$$

Also gilt für die Vektoren $v_i = (x_i, y_i, z_i)$

$$\begin{array}{lll} 1 = x_1 - 2y_1 & 0 = x_1 + y_1 + z_1 & 0 = y_1 - 3z_1 \\ 0 = x_2 - 2y_2 & 1 = x_2 + y_2 + z_2 & 0 = y_2 - 3z_2 \\ 0 = x_3 - 2y_3 & 0 = x_3 + y_3 + z_3 & 1 = y_3 - 3z_3 \end{array}$$

Wir erhalten:

$$\begin{array}{llll} z_1 = \frac{1}{3}y_1 & y_1 = -\frac{3}{4}x_1 & x_1 = \frac{2}{5} & v_1 = \left(\frac{2}{5}, -\frac{3}{10}, -\frac{1}{10}\right) \\ z_2 = \frac{1}{3}y_2 & y_2 = \frac{1}{2}x_2 & x_2 = \frac{3}{5} & v_2 = \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}\right) \\ x_3 = 2y_3 & y_3 = -\frac{1}{3}z_3 & z_3 = -\frac{3}{10} & v_3 = \left(\frac{2}{10}, \frac{1}{10}, -\frac{3}{10}\right) \end{array}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis ist, und wegen $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ reicht es zu zeigen, dass $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear unabhängig ist. Seien hierfür $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(0) = f_1(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) = \lambda_1 \\ 0 &= f_2(0) = f_2(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) = \lambda_2 \\ 0 &= f_3(0) = f_3(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) = \lambda_3 \end{aligned}$$

und folglich ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear unabhängig.

4. (a) ist wie in der Vorlesung gezeigt äquivalent zu $\mathrm{Ker}(T) = 0$, also zu (c).

Wir zeigen, dass T genau dann injektiv ist, wenn T^* surjektiv ist, d.h. wir zeigen, dass (a) und (b) äquivalent sind.

Bitte wenden!

"⇒": Sei T injektiv und sei $f \in V^*$. Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Wir erinnern daran, dass f durch die Bilder $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ vollständig bestimmt ist. Da T injektiv ist, sind $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ linear unabhängig. Also existiert eine lineare Abbildung $g : W \to \mathbb{K}$ mit

$$g(T(v_j)) = f(v_j) \quad (1 \leq j \leq n)$$

Es ist $T^*g = f$. Da f beliebig war, ist T^* surjektiv.

"⇐": Sei T^* surjektiv und sei $v \neq 0$. Dann existiert eine geordnete Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V mit $v = v_1$ und wie in der Vorlesung gezeigt eine duale Basis $(f_1, \ldots, f_n)$ von V^* definiert durch $f_i(v_j) = \delta_{ij}$. Da T^* surjektiv ist, existiert ein $g \in W^*$ mit $T^*g = f_1$ und folglich

$$1 = f_1(v) = T^*g(v) = g(T(v))$$

und wegen Linearität von g folgt $T(v) \neq 0$. Also ist $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ und folglich T injektiv.

Oben wurde verwendet, dass

$$\forall v \in V : \quad (v \neq 0 \Leftrightarrow \exists f \in V^* : f(v) \neq 0)$$

Wir beweisen dies nochmals explizit:

"⇒": Falls $v \neq 0$, dann existiert nach dem Steinitz'schen Austauschsatz eine geordnete Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V mit $v = v_1$ und wie in der Vorlesung gezeigt eine duale Basis $(f_1, \ldots, f_n)$ von V^* mit $f_i(v_j) = \delta_{ij}$.

"⇐": Da $f \in V^*$ linear ist, gilt $f(0) = 0$ und also $f(v) \neq 0 \Rightarrow v \neq 0$.

Letztere Aussage gilt natürlich auch in W, d.h. ein Element $w \in W$ ist ungleich Null genau dann, wenn ein $g \in W^*$ existiert mit $g(w) \neq 0$. Also ist (d) äquivalent zu $\forall v \in V \setminus \{0\} : T(v) \neq 0$, und folglich ist (d) äquivalent zu (a).

5. a) Wir wissen von Blatt 6, dass ein Unterraum $U \subseteq V$ mit $V = W \oplus U$ existiert. Des Weiteren haben wir in Blatt 7 gezeigt, dass eine Projektion $P : V \to W$ existiert, so dass $U = \mathrm{Ker}(P)$ und $P|_W = \mathrm{id}_W$. Wir zeigen nicht nur, dass jede Linearform auf W eine Erweiterung auf V besitzt, sondern wir konstruieren sogar eine injektive lineare Abbildung $\Phi_P : W^* \to V^*$, so dass für jedes $f \in W^*$ das Bild $\Phi_P(f) : V \to \mathbb{K}$ eine Erweiterung von f auf V ist. Hierfür definieren wir $\Phi_P : W^* \to V^*$ durch $\Phi_P(f) := f \circ P$ für $f \in W^*$. Da die Verknüpfung linearer Abbildungen linear ist, ist Φ_P wohldefiniert, d.h. $\Phi_P(f)$ ist tatsächlich

Siehe nächstes Blatt!

eine Linearform auf V. Die Linearität von Φ_P überprüft man wie üblich: seien $f_1, f_2 \in W^*$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann ist für beliebige $v \in V$

$$\begin{aligned}\Phi_P(f_1 + \lambda f_2)(v) =& \big((f_1 + \lambda f_2) \circ P\big)(v)\\ =&(f_1 + \lambda f_2)\big(P(v)\big)\\ =&f_1\big(P(v)\big) + \lambda f_2\big(P(v)\big)\\ =&(f_1 \circ P)(v) + \lambda(f_2 \circ P)(v)\\ =&\Phi_P(f_1)(v) + \lambda\Phi_P(f_2)(v)\end{aligned}$$

Da $v \in V$ beliebig war, folgt $\Phi_P(f_1 + \lambda f_2) = \Phi_P(f_1) + \lambda\Phi_P(f_2)$ und somit ist Φ_P linear.

Für die Injektivität nehmen wir an, dass $\Phi_P(f_1) = \Phi_P(f_2)$, d.h. für alle $v \in V$ gilt

$$f_1\big(P(v)\big) = \Phi_P(f_1)(v) = \Phi_P(f_2)(v) = f_2\big(P(v)\big)$$

und da $\mathrm{Im}(P) = W$, folgt

$$\forall w \in W : f_1(w) = f_2(w)$$

Also ist $f_1 = f_2$.

Wir zeigen nun, dass $\Phi_P(f)$ tatsächlich eine Erweiterung von f ist. Für $f \in W^*$ und $w \in W$ gilt

$$\Phi_P(f)(w) = f(P(w)) = f(w) \qquad \text{(wegen } P|_W = \mathrm{id}_W)$$

und somit $\Phi_P(f)|_W = f$ wie gewünscht. Die Tatsache, dass Φ_P eine injektive, lineare Abbildung $W^* \to V^*$ ist, zeigt, dass W^* als Unterraum in V^* eingebettet werden kann. Die Einbettung ist *nicht* kanonisch, da Φ_P von der Wahl von U abhängt.

Beachten Sie die folgende alternative Argumentation:

- Falls $W = V$ ist, dann ist nichts zu zeigen.
- Falls W ein echter Unterraum von V ist und von $\{0\}$ verschieden, dann besitzt W eine Basis $\{v_1, \ldots, v_m\}$ und jedes $f \in W^*$ ist durch die Bilder $\{f(v_1), \ldots, f(v_m)\}$ vollständig bestimmt. Unter Verwendung von Steinitz finden wir $\{v_{m+1}, \ldots, v_n\} \subseteq V$ so dass $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V ist. Definiere eine Abbildung $F : V \to \mathbb{K}$ durch lineare Erweiterung von

$$F(v_j) := \begin{cases} f(v_j) & \text{falls } 1 \leq j \leq m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

  Dann ist $F \in V^*$ und $F|_W = f$, d.h. F ist eine Erweiterung von f auf V.

Bitte wenden!

- Falls $W = \{0\}$, dann ist $W^* = \{0\}$ und $0 \in V^*$ ist eine Erweiterung von jedem $f \in W^*$.

Das eingangs gegebene Argument erlaubt es, die Fallunterscheidung zu unterlassen, da sie bereits in der Konstruktion des direkten Summanden U und der Projektion P vorgenommen wurde.

b) Seien $f_1, f_2 \in W^\perp$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Für $w \in W$ gilt

$$(f_1 + \lambda f_2)(w) = f_1(w) + \lambda f_2(w) = 0$$

Des Weiteren ist $W^\perp \neq \emptyset$, da $0 \in W^\perp$. Folglich ist $W^\perp$ ein Unterraum.

Für den Isomorphismus definieren wir eine Abbildung $\Phi : W^\perp \to \left({}^{V}\!/_{W}\right)^*$, $f \mapsto \Phi(f)$ durch

$$\Phi(f)(v + W) := f(v) \quad (v \in V)$$

Wir zeigen, dass dies eine wohldefinierte lineare und invertierbare Abbildung ist.

Sei $f \in W^\perp$ und seien $v, v' \in V$, so dass $v + W = v' + W$, dann ist $v' = v + w$ für ein $w \in W$, folglich

$$f(v') = f(v + w) = f(v) + f(w) = f(v)$$

da $f \in W^\perp$. Also ist die Abbildung Φ wohldefiniert.

Nach Definition der Vektorraumstruktur auf V^* ist für $f_1, f_2 \in W^\perp$ und $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}\Phi(f_1 + \lambda f_2)(v + W) =& (f_1 + \lambda f_2)(v) = f_1(v) + \lambda f_2(v)\\ =& \Phi(f_1)(v + W) + \lambda \Phi(f_2)(v + W)\\ =& \big(\Phi(f_1) + \lambda \Phi(f_2)\big)(v + W)\end{aligned}$$

und folglich ist Φ linear.

Wir zeigen, dass Φ injektiv ist. Angenommen $\Phi(f_1) = \Phi(f_2)$, dann ist für alle $v \in V$

$$f_1(v) = \Phi(f_1)(v + W) = \Phi(f_2)(v + W) = f_2(v)$$

und folglich $f_1 = f_2$.

Wir zeigen, dass Φ surjektiv ist. Sei $F \in \left({}^{V}\!/_{W}\right)^*$ und sei $\pi : V \to {}^{V}\!/_{W}$ die Quotientenabbildung $\pi(v) \mapsto v + W$ (vgl. Serie 7). Dann ist $f := F \circ \pi : V \to \mathbb{K}$ linear, und folglich $f \in V^*$. Da $W \subseteq \operatorname{Ker}(\pi)$, ist $f \in W^\perp$. Sei $v \in V$, dann ist

$$\Phi(f)(v + W) = f(v) = (F \circ \pi)(v) = F(v + W)$$

und da v beliebig war, ist $\Phi(f) = F$ und Φ surjektiv.

c) Wir definieren $\Psi : W \to \left(V^*/W^\perp\right)^*$ durch

$$\Psi(w)(f + W^\perp) := \mathrm{ev}_w(f)$$

wobei $\mathrm{ev}_w : V^* \to \mathbb{K}$, $f \mapsto f(w)$ wie in der Vorlesung. Wir zeigen, dass Ψ wohldefiniert ist. Seien $f, f' \in V^*$ mit $f + W^\perp = f' + W^\perp$, dann ist $f' = f + h$ mit $h \in W^\perp$ und folglich

$$\mathrm{ev}_w(f') = \mathrm{ev}_w(f + h) = \mathrm{ev}_w(f) + \underbrace{\mathrm{ev}_w(h)}_{=h(w)=0} = \mathrm{ev}_w(f)$$

Also ist Ψ wohldefiniert.

Es wurde in der Vorlesung gezeigt, dass die Abbildung $w \mapsto \mathrm{ev}_w$ linear ist. Folglich ist für $w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ sowie für $f \in V^*$

$$\begin{aligned}\Psi(w_1 + \lambda w_2)(f + W^\perp) =& \mathrm{ev}_{w_1 + \lambda w_2}(f) = \mathrm{ev}_{w_1}(f) + \lambda \mathrm{ev}_{w_2}(f) \\ =& \Psi(w_1)(f + W^\perp) + \lambda \Psi(w_2)(f + W^\perp) \\ =& \big(\Psi(w_1) + \lambda \Psi(w_2)\big)(f + W^\perp)\end{aligned}$$

und folglich ist Ψ linear.

Wir zeigen, dass Ψ injektiv ist. Seien $w_1, w_2 \in W$ mit $\Psi(w_1) = \Psi(w_2)$, dann ist für beliebige $f \in V^*$

$$f(w_1) = \mathrm{ev}_{w_1}(f) = \Psi(w_1)(f + W^\perp) = \Psi(w_2)(f + W^\perp) = \mathrm{ev}_{w_2}(f) = f(w_2)$$

Insbesondere ist $\mathrm{ev}_{w_1} = \mathrm{ev}_{w_2}$. Da die Abbildung $V \to V^{**}$, $v \mapsto \mathrm{ev}_v$ ein Isomorphismus und insbesondere injektiv ist, folgt $w_1 = w_2$.

Um zu zeigen, dass Ψ ein Isomorphismus ist, reicht es wegen der Dimensionsformel und der bereits diskutierten Injektivität von Ψ zu zeigen, dass

$$\dim \left(V^*/W^\perp\right)^* = \dim W$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $U \cong U^*$ für alle endlichdimensionalen Vektorräume U. Somit folgt aus Teilaufgabe b), dass $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$ und folglich

$$\begin{aligned}\dim \left(V^*/W^\perp\right)^* &= \dim V^*/W^\perp = \dim V^* - \dim W^\perp \\ &= \dim V - (\dim V - \dim W) = \dim W\end{aligned}$$

wie gewünscht.