Serie 10: Elementare Zeilenumformungen & Elementarmatrizen, Rang & Inverse einer Matrix

1. Seien U, V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Seien $T_1, T_2 \in \mathrm{Hom}(V, W)$, dann ist

$$\mathrm{Rang}(T_1 + T_2) \leq \mathrm{Rang}(T_1) + \mathrm{Rang}(T_2)$$

b) Seien $T \in \mathrm{Hom}(U, V)$ und $S \in \mathrm{Hom}(V, W)$, dann ist

$$\mathrm{Rang}(S \circ T) \leq \min\{\mathrm{Rang}(T), \mathrm{Rang}(S)\}$$

2. a) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und A eine quadratische Matrix mit Einträgen in $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn A eine Basiswechselmatrix ist.

b) Beweisen Sie den folgenden Satz aus der Vorlesung: Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und sei r der Rang von A. Dann ist $r \leq \min\{m, n\}$ und mittels endlich vieler Zeilen- und Spaltenumformungen kann A in die Form $D \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ gebracht werden, wobei

$$D_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \ \&\ i \leq r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

3. ♡**a)** Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ beliebig. Seien $F \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$ sowie $G \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertierbar. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Ker}(A) = G\big(\mathrm{Ker}(FAG)\big) \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(A) = F^{-1}\big(\mathrm{Im}(FAG)\big)$$

Bitte wenden!

b) Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$ und sei $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Zeigen Sie, dass für alle geordneten Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ von V, W gilt $\operatorname{Rang}(T) = \operatorname{Rang}([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})$.

c) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$$

Bestimmen Sie Basen von $\operatorname{Ker}(L_A)$ und $\operatorname{Im}(L_A)$ für $L_A : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$.

d) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie den Rang von A

1. über $\mathbb{R}$.
2. über $\mathbb{F}_2$.

4. Bestimmen Sie die Inversen der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

5. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$$

Wenden Sie elementare Zeilenumformungen in $\mathbb{Q}$ auf A an, so dass die resultiernde Matrix $R \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$ auf der linken Seite die 3×3-Einheitsmatrix I_3 enthält. Finden Sie eine invertierbare Matrix $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{Q})$, so dass $BA = R$ und bestimmen Sie B^{-1}.

Siehe nächstes Blatt!

6. Online Abgabe Serie 10:

1. Welche der folgenden Matrizen sind Inverse von $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ über $\mathbb{Q}$?

(a) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. Der Rang der linearen Abbildung L_A für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

ist

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

(e) 4

Bitte wenden!

3. Bestimmen Sie den Rang der Matrix A, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

(e) 4

4. Für alle $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ gilt $\mathrm{Rang}(AB) = \mathrm{Rang}(BA)$.

(a) richtig

(b) falsch

5. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & k+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix} \qquad (k \in \mathbb{R})$$

Was ist der Rang der Matrix A?

(a) 4 für beliebige Werte von k.

(b) 3 für beliebige Werte von k.

(c) 2, falls $k = \pm 1$, und 4 sonst.

(d) 3, falls $k = \pm 1$, und 4 sonst.

(e) 3, falls $k = 1$, und 4 sonst.

Siehe nächstes Blatt!

6. *Prüfung Winter 2017:* Die Transponierte einer Elementarmatrix ist wieder eine Elementarmatrix.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

7. *Prüfung Winter 2017:* Sei $A \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ und $B \in M_{1\times n}(\mathbb{K})$ mit $n > 1$. Dann ist es möglich, dass $\mathrm{Rang}(AB) = n$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

8. *Prüfung Winter 2017:* Die Elementarmatrizen in $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ zusammen mit der Matrixmultiplikation bilden eine Gruppe.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

9. *Prüfung Winter 2017:* Für eine quadratische Matrix A gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Rang}\left(A^n\right) \geq \mathrm{Rang}\left(A^{n+1}\right).$$

(a) Wahr.

(b) Falsch.

10. *Prüfung Winter 2017:* Seien $A, B \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, dann gilt

$$\mathrm{Rang}(AB) = \mathrm{Rang}(BA).$$

(a) Wahr.

(b) Falsch.

11. *Prüfung Sommer 2017:* Der Rang einer oberen Dreiecksmatrix ist gleich der Anzahl der von 0 verschiedenen Diagonalelemente.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

12. *Prüfung Sommer 2017:* Eine Matrix ist genau dann nicht invertierbar wenn Zeilenrang $\neq$ Spaltenrang.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Donnerstag, den 30. November 11:00 Uhr vormittags im Raum HG J 68, in einem der Fächer beschriftet mit *Abgabe*.