Lösung Serie 11: Lineare Gleichungssysteme, Gauss-Elimination & LR-Zerlegung

1. Der Beweis in Teilaufgabe (b) ist konstruktiv in dem Sinne, dass er einen ALgorithmus liefert, wie man die LR-Zerlegung einer Matrix bestimmen kann. Der Algorithmus lässt sich wie durch den Beweis vorgegeben als Computerprogramm implementieren, und so ist er insbesondere für die Numerik (also spätestens im zweiten Semester) von grosser Wichtigkeit. Diesre Beweis wird aber nicht in der vollständigen Form wie hier aufgeführt als Prüfungsfragen auftauchen.

a) Seien $u, v \in \mathbb{K}^n$, dann ist $(U_u)_{ij} = \delta_{ij} + u_{i-1}\delta_{j1}$, $(U_v)_{ij} = \delta_{ij} + v_{i-1}\delta_{j1}$. Es folgt

$$\begin{aligned}(U_uU_v)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n+1}(U_u)_{ik}(U_v)_{kj} = \sum_{k=1}^{n+1}(\delta_{ik} + u_{i-1}\delta_{k1})(\delta_{kj} + v_{k-1}\delta_{j1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\delta_{ik}\delta_{kj} + u_{i-1}\delta_{j1}\sum_{k=1}^{n+1}v_{k-1}\delta_{k1} \\ &\qquad + u_{i-1}\sum_{k=1}^{n+1}\delta_{k1}\delta_{kj} + \delta_{j1}\sum_{k=1}^{n+1}v_{k-1}\delta_{ik} \\ &= \delta_{ij} + u_{i-1}\delta_{j1} + v_{i-1}\delta_{j1}\end{aligned}$$

wobei wir der Einfachheit halber $u_0 = v_0 = 0$ definieren. Folglich gilt

$$U_uU_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u+v & I_n \end{pmatrix} = U_{u+v}$$

Die Gruppenoperation ist assoziativ, da Matrixmultiplikation assoziativ ist, und $U_0 = I_{n+1}$ ist ein neutrales Element in N. Die oben gefundene Formel impliziert $U_v^{-1} = U_{-v}$.

Bitte wenden!

b) Falls $n = 1$, dann ist $A = a = 1a$ für $a \in \mathbb{K}$ und dies ist eine LR-Zerlegung, wie gewünscht.

Sei die Aussage wahr für quadratische Matrizen der Dimension $\leq n$ und sei nun $A \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{K})$. Angenommen A ist von der Form

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & w^T \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

mit $A' \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $w \in \mathbb{K}^n$ und 0 der Nullvektor in $\mathbb{K}^n$. Nach Induktionsannahme existieren eine Permutationsmatrix $P' \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, eine untere Dreiecksmatrix $L' \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ mit Einsen auf der Diagonalen sowie eine obere Dreiecksmatrix $R' \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, so dass

$$P'A' = L'R'$$

Sei $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{smallmatrix}\right) \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{K})$, dann ist

$$\begin{aligned} PA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & w^T \\ 0 & A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & w^T \\ 0 & P'A' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} & w^T \\ 0 & L'R' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L' \end{pmatrix}}_{=:L} \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & w^T \\ 0 & R' \end{pmatrix}}_{=:R} = LR, \end{aligned}$$

wobei R, L eine obere Dreiecksmatrix und eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen sind.

Wenn A nicht von obiger Form ist, unterscheiden wir zwei Fälle. Wir betrachten zuerst den Fall $A_{11} \neq 0$. Für jedes $2 \leq i \leq n+1$ können wir dann das $-A_{i1}/A_{11}$-fache der ersten Zeile von A zur i-ten Zeile addieren. Nach jeder solchen Operation erhalten wir eine Matrix $\tilde{A}$ mit der Eigenschaft $\tilde{A}_{i1} = 0$ und am Schluss also eine Matrix der gewünschten Form. Die beschriebene elementare Zeilenumformung ist gegeben durch die Matrix E_{i1} mit

$$(E_{i1})_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = l \\ -A_{i1}/A_{11} & \text{falls } k = i \text{ und } l = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Tatsächlich berechnet man

$$\begin{aligned} (E_{i1}A)_{kl} &= \sum_{r=1}^{n+1} \underbrace{(E_{i1})_{kr}}_{=\delta_{kr} - \frac{A_{i1}}{A_{11}}\delta_{ki}\delta_{r1}} A_{rl} \\ &= \begin{cases} (-A_{i1}/A_{11})A_{1l} + A_{il} & \text{falls } k = i \\ A_{kl} & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Da jedes $E_{i1} \in N$ mit N die Gruppe aus Teilaufgabe (a), folgt also, dass ein Vektor $v \in \mathbb{K}^n$ existiert, so dass

$$U_v A = \begin{pmatrix} A_{11} & w^T \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

wie oben. Wir haben oben gezeigt, dass eine Permutationsmatrix $P' \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, eine obere Dreiecksmatrix $R \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{K})$ und eine untere Dreiecksmatrix $L \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{K})$ mit Einsen auf der Diagonalen existieren, so dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} U_v A = LR$$

Für das Produkt auf der linken Seite gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} U_v &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'v & P' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'v & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} = U_{P'v} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und da $U_{P'v}$ und auch die dazu inverse Matrix $U_{-P'v}$ untere Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen sind, folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} A = \underbrace{U_{-P'v} L}_{=:L'} R = L'R$$

wobei L' eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen ist. Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{smallmatrix}\right) \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{K})$ ist eine Permutationsmatrix, da alle Spalten genau eine Eins enthalten und somit folgt die Behauptung.

Es bleibt, den Fall $A_{11} = 0$ zu betrachten. Falls $A_{i1} = 0$ für alle $1 \leq i \leq n+1$, dann sind wir im eingangs betrachteten Fall und die Behauptung ist bereits bewiesen. Wir können also annehmen, dass ein $1 < i \leq n+1$ existiert, so dass $A_{i1} \neq 0$. Indem wir die Zeilen 1 und i vertauschen, können wir garantieren, dass der Eintrag oben links von null verschieden ist. Diese Vertauschung entspricht der Linksmultiplikation von A mit der Matrix $\tilde{P}$ gegeben durch

$$\tilde{P}^{(j)} = \begin{cases} e_i & \text{falls } j = 1 \\ e_1 & \text{falls } j = i \\ e_j & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ die geordnete Standardbasis von $\mathbb{K}^{n+1}$ ist. Tatsächlich ist $\tilde{P}_{kl} = \delta_{ki}\delta_{1l} + (1-\delta_{k1})(1-\delta_{ki})\delta_{kl} + \delta_{k1}\delta_{il}$ und folglich

$$(\tilde{P}A)_{kl} = \sum_{r=1}^{n+1} \tilde{P}_{kr} A_{rl}$$

Bitte wenden!

$$
\begin{aligned}
&= \delta_{ik} \underbrace{\sum_{r=1}^{n+1} \delta_{1r} A_{rl}}_{A_{1l}} + (1-\delta_{k1})(1-\delta_{ki}) \underbrace{\sum_{r=1}^{n+1} \delta_{kr} A_{rl}}_{A_{kl}} + \delta_{1k} \underbrace{\sum_{r=1}^{n+1} \delta_{ir} A_{rl}}_{A_{il}} \\
&= \delta_{ik} A_{1l} + (1-\delta_{k1})(1-\delta_{ki}) A_{kl} + \delta_{1k} A_{il} \\
&= \begin{cases} A_{il} & \text{falls } k = 1 \\ A_{1l} & \text{falls } k = i \\ A_{kl} & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Die Matrix $\tilde{P}A$ erfüllt $(\tilde{P}A)_{11} \neq 0$ und somit reduziert sich das Problem auf die vorangehende Situation: Wir wissen, es existieren $P', L, R \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{K})$, so dass

$$P'(\tilde{P}A) = LR,$$

wobei P' eine Permutationsmatrix, R eine obere Dreiecksmatrix und L eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen sind. Ähnlich wie oben zeigt man, dass Rechtsmultiplikation mit $\tilde{P}$ die erste und die i-te Spalte vertauschen. Also ist $P := P'\tilde{P}$ eine Permutationsmatrix und somit ist die Aussage bewiesen mit $PA = LR$.

c) Die LR-Zerlegung ist nicht eindeutig, wie das folgende Beispiel mit $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ zeigt:

$$
\begin{aligned}
P_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = L_1 R_1 \\
P_2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = L_2 R_2
\end{aligned}
$$

Wenn wir die Matrix A mit dem Beweis in Teilaufgabe (b) vergleichen, sehen wir, dass wir uns in der Situation $A_{11} = 0$ befinden. Tatsächlich wurde dieses Beispiel konstruiert, indem wir im einen Fall zu Beginn die erste und die zweite, und im zweiten Fall zu Beginn die erste und die dritte Zeile vertauscht haben. Dies führt uns zu folgender *falscher*

Vermutung: Angenommen $P = I_n$, dann ist die LR-Zerlegung eindeutig.

Ein Gegenbeispiel ist schnell gefunden: Betrachte die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, dann ist A bereits eine obere Dreiecksmatrix und die LR-Zerlegung ist mit $P = I_3$ möglich. Es gilt aber:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Siehe nächstes Blatt!

und somit ist die Zerlegung nicht eindeutig. Dieser Fall fängt das Problem im Wesentlichen ein.

Proposition: Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertierbar und sei (P, L, R) eine LR-Zerlegung wie oben, dann ist (P, L, R) durch P oder R eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass aus der Invertierbarkeit von A die Invertierbarkeit von P, L, R folgt. Zuerst zu P: Jede Permutationsmatrix ist invertierbar, da per definitionem die Spalten genau die Vektoren der Standardbasis von $\mathbb{K}^n$ sind und die Permutationsmatrix somit vollen Rang besitzt. Damit können wir die Invertierbarkeit von L und R zeigen. Mit $PA = LR$ und P, A invertierbar, ist auch LR invertierbar. Folglich ist $L_L \circ L_R = L_{LR} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ bijektiv und darum sind L_L surjektiv bzw. L_R injektiv. Da $L_L, L_R \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$, sind L_L, L_R invertierbar und folglich sind L, R invertierbar.

Wir zeigen nun, dass L und R durch A und P vollständig bestimmt sind. Seien L', R' und L, R so gegeben, dass (P, L, R) und (P, L', R') zwei LR-Zerlegungen von A sind, d.h.

$$LR = PA = L'R'$$

Wegen der Invertierbarkeit folgt, dass $(L')^{-1}L = R'R^{-1}$. Da das Produkt von unteren Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen und auch die Inverse untere Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen sind, und da ebenso das Produkt von oberen Dreiecksmatrizen und (soweit sie existieren) auch die Inverse obere Dreiecksmatrizen sind, ist $(L')^{-1}L = R'R^{-1}$ sowohl eine obere, als auch eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen, also die Identität. Also ist $R^{-1} = (R')^{-1}$ bzw. $R = R'$ und analog $L = L'$.

Wir zeigen noch den zweiten Fall, dass L und P durch A und R vollständig bestimmt sind. Seien (P, L, R) und (P', L', R) zwei LR-Zerlegungen der invertierbaren Matrix A. Dann ist

$$L^{-1}PA = R = (L')^{-1}P'A$$

und wegen der Invertierbarkeit von A folgt

$$L(L')^{-1} = P(P')^{-1}$$

Das Produkt zweier Permutationsmatrizen und auch die Inversen von Permutationsmatrizen sind Permutationsmatrizen und folglich ist $P(P')^{-1}$ eine Permutationsmatrix, die auch eine untere Dreiecksmatrix ist, also die Identität. Es folgt $P = P'$ und folglich auch $L = L'$. $\square$

Insbesondere wird also die falsche Behauptung gültig, wenn wir zusätzlich noch annehmen, dass die Matrix A invertierbar ist.

Bitte wenden!

Es bleibt eine Matrix A anzugeben, die zwei LR-Zerlegungen (P, L, R) sowie (P', L, R') für verschiedene Permutationsmatrizen P, P' sowie verschiedene obere Dreiecksmatrizen R, R' besitzt. Betrachte hierfür die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, dann gelten:

$$P_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = L_1 R_1$$

$$I_2 A = A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = L_2 R_2$$

d) Für $P = I_5$ erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 10 & 8 \\ 1 & 4 & 6 & 8 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hierfür geht man wie folgt vor:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 10 & 8 \\ 1 & 4 & 6 & 8 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_4 - 2Z_1 \\ Z_5 - Z_1}]{\substack{Z_2 - 2Z_1 \\ Z_3 - Z_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_5 - 2Z_2]{\substack{Z_3 - 2Z_2 \\ Z_4 - Z_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_5 - Z_3]{Z_4 - 2Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_5 - 2Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: R$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir haben gezeigt, dass

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&-2&1&0\\0&0&-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&-2&1&0&0\\0&-1&0&1&0\\0&-2&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-2&1&0&0&0\\-1&0&1&0&0\\-2&0&0&1&0\\-1&0&0&0&1\end{pmatrix}}_{=:L^{-1}} A = R$$

und also ist $A = LR$ mit

$$\begin{aligned}L &= \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\2&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\2&0&0&1&0\\1&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&2&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&2&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&2&1&0\\0&0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&2&1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\2&1&0&0&0\\1&2&1&0&0\\2&1&2&1&0\\1&2&1&2&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

2. **a)** Im Unterschied zur LR-Zerlegung müssen wir uns hier nicht darum kümmern, die Permutationsmatrizen auf einer Seite zu sammeln. Wir machen wieder eine Induktion über die Anzahl Zeilen von $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

"$m = 1$": Falls $A = 0$, dann ist nichts zu beweisen. Sei also $A \neq 0$, dann existiert $1 \leq j \leq n$ minimal, sodass $A_{1j} \neq 0$. Wir multiplizieren die erste (und einzige) Zeile von A mit $1/A_{1j}$, dann ist der erste von null verschiedene Eintrag in der ersten Zeile von A eine 1. Da A genau eine Zeile besitzt, ist A danach in Zeilenstufenform.

"$m \mapsto m + 1$": Angenommen die Aussage stimmt für Matrizen $B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Sei $A \in M_{(m+1)\times n}(\mathbb{K})$, dann ist

$$A = \begin{pmatrix} B \\ v^T \end{pmatrix}$$

mit $B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $v \in \mathbb{K}^n$. Nach Induktionsannahme existiert eine endliche Folge elementarer Zeilenumformungen, so dass $B \longrightarrow B'$ in Zeilenstufenform, d.h. es gibt $C \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ ein endliches Produkt von Elementarmatrizen, so dass CB in Zeilenstufenform ist. Die Matrix $C' := \left(\begin{smallmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist ebenfalls ein Produkt von Elementarmatrizen, und folglich existiert eine endliche Folge elementarer Zeilenumformungen, die A in $A' = \left(\begin{smallmatrix} B \\ v^T \end{smallmatrix}\right)$ überführt, so dass B in Zeilenstufenform ist, was wir von nun an annehmen.

Bitte wenden!

Sei $1 \leq j \leq n$ minimal, so dass $v_j \neq 0$, d.h. der erste von null verschiedene Eintrag von v ist der Eintrag an der Stelle j. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden: Entweder ist die Spalte j eine Pivotspalte von B, oder j ist keine Pivotspalte von B.
Falls j eine Pivotspalte von B ist, dann existiert ein Vielfaches einer Zeile von B, sagen wir $\lambda B_{(i)}$, so dass $(v^T + \lambda B_{(i)})_k = 0$ für $1 \leq k \leq j$. Wir wenden die entsprechende Zeilenumformung an und fahren ebenso fort, so dass wir nach endlich vielen Schritten entweder in der Situation sind, dass $v = 0$, oder das minimale j mit $v_j \neq 0$ ist keine Pivotspalte von B.
Falls $v = 0$, dann ist nichts zu zeigen. Wir nehmen also an, dass das minimale $1 \leq j \leq n$ mit $v_j \neq 0$ nicht einer Pivotspalte von B entspricht. Wir multiplizieren also die $m + 1$-te Zeile von A mit v_j^{-1}, so dass der relevante Eintrag den Wert 1 annimmt.
Wir formalisieren jetzt folgende Überlegung: Wir vertauschen die Zeile $m+1$ Schritt für Schritt mit der darüberliegenden Zeile und bewegen sie in der Matrix hoch, so lange wie j kleiner ist, als der Index der Pivotspalte in der darüberliegenden Zeile. Danach eliminieren wir mittels elementarer Zeilenumformungen alle Einträge in den Pivotspalten, und gehen dabei von links nach rechts die Pivotspalte durch, so dass korrigierte Spalten durch von späteren Operationen unberührt bleiben.
Sei hierfür $I : \{1, \dots, m + 1\} \to \{1, \dots, n\} \cup \{\infty\}$ die Funktion

$$I(i) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid A_{ik} \neq 0\} \quad (1 \leq i \leq m + 1)$$

d.h. $I(i)$ ist die erste Spalte, die in Zeile i einen von null verschiedenen Eintrag hat. Wir verwenden die Konvention $\min\{\} := \infty$, d.h. wenn die i-te Zeile eine Nullzeile ist, dann ist $I(i) = \infty$. Insbesondere ist die erste Nullzeile von A die Zeile $i_0 := \min\{1 \leq i \leq m + 1 \mid I(i) = \infty\}$.
Falls $i_0 < \infty$, dann besitzt A eine Nullzeile und wir vertauschen Zeilen $m+1$ und i_0, so dass wir im Folgenden annehmen können, dass

$$A = \begin{pmatrix} B' \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $B' \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Nach Induktionsannahme können wir B' mittels elementarer Zeilenumformungen in Zeilenstufenform überführen und wenn B' in Zeilenstufenform ist, dann ist auch $\left(\begin{smallmatrix} B' \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ in Zeilenstufenform und somit ist die Aussage bewiesen.
Sei nun also $i_0 = \infty$, d.h. A besitzt keine Nullzeilen. Nach Annahme sind die Werte $I(i)$ für verschiedene $1 \leq i \leq m + 1$ paarweise verschieden und $A_{iI(i)} = 1$ für alle i. Wir vertauschen nun mit elementaren Zeilenumformungen die Zeilen von A, so dass gilt[1]

$$i < i' \Rightarrow I(i) < I(i') \quad (1 \leq i \leq m + 1)$$

[1] Sie werden in der Algebra lernen, dass sich jede Permutation einer endlichen Menge als Komposition paarweiser Vertauschungen schreiben lässt.

Siehe nächstes Blatt!

Da nach Annahme A von der Form

$$A = \begin{pmatrix} B \\ v^T \end{pmatrix}$$

mit $B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ in Zeilenstufenform ist, bestimmen wir hierfür die erste Zeile i_1 mit $I(i_1) \leq I(n+1)$. Falls $i_1 = n+1$, dann sind die Zeilen von A bereits in der richtigen Ordnung. Ansonsten wenden wir die Zeilenvertauschungen $Z_i \leftrightarrow Z_{i+1}$ iterativ für $i = n$ bis und mit $i = i_1$ an.
Mit A in dieser Form, bemerken wir, dass das einzige noch zu behebende Problem ist, dass die Einträge oberhalb einer Pivotstelle nicht alle 0 sein müssen. Für $1 \leq i \leq m+1$ addieren wir nun für $1 \leq k < i$ das $-A_{kI(i)}$-fache der i-ten Zeile zur k-ten Zeile und setzen damit iterativ diese Einträge alle gleich null. Die resultierende Matrix hat Zeilenstufenform.

b) Wie in Aufgabe 1.d) ausgeführt wurde, lässt sich die Matrix aus der Aufgabenstelllung mittels elementarer Zeilenumformungen in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 - 2Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 - 2Z_3]{Z_1 + 3Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_3 - 2Z_4]{\substack{Z_1 - 6Z_4 \\ Z_2 + 3Z_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3 + 3Z_5 \\ Z_4 - 2Z_5}]{\substack{Z_1 + 12Z_5 \\ Z_2 - 6Z_5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die letzte Matrix ist in Zeilenstufennormalform.

3. Die Koeffizientenmatrix des LGS ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & 9 & -2 & -11 \\ 4 & 12 & -6 & -8 \\ 2 & 6 & 2 & -14 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

a) In der Notation der letzten Serie finden wir

$$A \xrightarrow{\substack{Z_2-3Z_1\\Z_3-4Z_1\\Z_4-2Z_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -20 \\ 0 & 0 & 10 & -20 \\ 0 & 0 & 10 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{Z_3-Z_2\\Z_4-Z_2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{10}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_1+4Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: A'$$

Da wir A' mittels elementarer Zeilenumformungen aus A erhalten haben, existiert eine invertierbare Matrix $F \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ mit $A' = FA$ und wir erhalten also $\mathrm{Ker}(L_{A'}) = \mathrm{Ker}(L_A)$, was in Serie 10 gezeigt wurde. Somit sind die linearen Gleichungssysteme $Ax = 0$ und $A'x = 0$ äquivalent und es reicht $\mathrm{Ker}(L_{A'})$ zu bestimmen. Da $\mathrm{Rang}(A') = 2$, wissen wir $\mathrm{nullity}(L_{A'}) = 2$. Man überprüft, dass

$$S := \left\{ v_1 := \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathrm{Ker}(L_{A'})$$

S ist sicherlich linear unabhängig, so dass $\mathrm{Ker}(L_A) = \mathrm{span}\{v_1, v_2\}$.

b) Es wurde in der Vorlesung gezeigt, dass

$$\{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = b\} = \{s\} + \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$$

für jede Lösung $As = b$. Unter Verwendung von Teilaufgabe müssen wir also nur eine Lösung $As = b$ für $b = (9, -3, 6, -12)^T$. Wir verwenden wieder die Tatsache, dass für beliebige $C \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ ein Vektor $s \in \mathbb{R}^4$ genau dann eine Lösung von $Ax = b$ ist, wenn s eine Lösung von $(CA)x = Cb$ ist. Wir berechnen

$$(A \mid b) \xrightarrow{\substack{Z_2-3Z_1\\Z_3-4Z_1\\Z_4-2Z_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & -30 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & -30 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & -30 \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$\xrightarrow[]{\substack{Z_3-Z_2\\ Z_4-Z_2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{10}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_1+4Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: (A' \mid b')$$

Der Vektor $s = (-3, 0, -3, 0)^T$ ist eine Lösung von $A's = b'$ und folglich ist

$$\{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = b\} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Bemerkung: Man beachte, dass man die Matrix $(A \mid b)$ zuerst auf Zeilenstufenform bringen und dann sowohl die homogene Lösung als auch die spezielle Lösung ablesen könnte, und also die Rechnung nur einmal durchführen müsste.

4. a) Sei

$$A = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir lösen nun das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$. Angenommen, wir kennen eine Lösung s dieses Gleichungssystems, dann ist per definitionem

$$s^T v_j = (v_j^T s)^T = v_j^T s = 0 \quad (1 \leq j \leq 4)$$

und also ist $W \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 \mid s^T x = 0\}$. Falls s eine nicht-triviale Lösung von $Ax = 0$ ist, dann ist $\dim \operatorname{Ker}(L_{s^T}) = 3$ und falls $\dim W = 3$, dann folgt $W = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid s^T x = 0\}$.

Hierzu bestimmen wir zu Beginn die Dimension von W, bzw. den Rang der Matrix $B = A^T$ mit $B^{(j)} = v_j$. Wegen $\operatorname{Rang}(A^T) = \operatorname{Rang}(A)$, können wir stattdessen den Rang von A bestimmen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

$$\xrightarrow{Z_3-Z_1}\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&0&-1&1\\0&2&1&1\\0&2&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_4-Z_3}\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&0&-1&1\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_1-Z_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&-1&1\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3+Z_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&-1&1\\0&2&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

und folglich ist tatsächlich $\dim W = 3$. Man sieht, dass $s := (1,1,-1,-1)^T$ eine nicht-triviale Lösung ist, wie oben gewünscht.

b) Wir bestimmen den Rang von $A = (v_1, v_2, v_3)$, $B = (v_1, v_2, v_4)$, $C = (v_1, v_3, v_4)$ sowie $D = (v_2, v_3, v_4)$:

$$A = \begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&4\\1&-1&2\\2&1&3\end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{Z_2-2Z_1\\Z_3-Z_1\\Z_4-2Z_1}} \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&2\\0&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3+Z_4} \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&2\\0&0&2\\0&1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Rang}(A) = 3$$

$$B = \begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&2\\1&-1&1\\2&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{Z_2-2Z_1\\Z_3-Z_1\\Z_4-2Z_1}} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3+Z_4} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&0&2\\0&1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Rang}(B) = 3$$

$$C = \begin{pmatrix}1&1&0\\2&4&2\\1&2&1\\2&3&1\end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{Z_2-2Z_1\\Z_3-Z_1\\Z_4-2Z_1}} \begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&2\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{Z_2-2Z_3\\Z_4-Z_3}} \begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Rang}(C) = 2$$

$$D = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&4&2\\-1&2&1\\1&3&1\end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3+Z_4} \begin{pmatrix}0&1&0\\0&4&2\\0&5&2\\1&3&1\end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{Z_2-4Z_1\\Z_3-5Z_1\\Z_4-3Z_1}} \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&2\\1&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Rang}(D) = 3$$

Da $\binom{4}{3} = 4$, sind $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_1, v_2, v_4\}$ und $\{v_2, v_3, v_4\}$ alle Basen von W aus Elementen in $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Siehe nächstes Blatt!

5. Falls $b = 0$, dann ist $B = aI_4$. Falls auch $a = 0$, dann ist also $B = 0$ in Zeilenstufenform, ansonsten multiplizieren wir jede Zeile von B mit a^{-1} und führen B in I_4 über. Letztere ist in Zeilenstufenform.

Sei also $b \neq 0$.

"$a = 0$": Wir berechnen

$$B \xrightarrow{Z_2 \leftrightarrow Z_1} \begin{pmatrix} b & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & b \\ 0 & b & 0 & b \\ b & 0 & b & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4 - Z_1]{Z_3 - Z_2} \begin{pmatrix} b & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{b} Z_1]{\frac{1}{b} Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und letztere ist in Zeilenstufenform.

"$a \neq 0$": Wir berechnen

$$B = \begin{pmatrix} a & b & 0 & b \\ b & a & b & 0 \\ 0 & b & a & b \\ b & 0 & b & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{a} Z_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & 0 & \frac{b}{a} \\ b & a & b & 0 \\ 0 & b & a & b \\ b & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_4 - bZ_1]{Z_2 - bZ_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & 0 & \frac{b}{a} \\ 0 & a - \frac{b^2}{a} & b & -\frac{b^2}{a} \\ 0 & b & a & b \\ 0 & -\frac{b^2}{a} & b & a - \frac{b^2}{a} \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2 - Z_4} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & 0 & \frac{b}{a} \\ 0 & a & 0 & -a \\ 0 & b & a & b \\ 0 & -\frac{b^2}{a} & b & a - \frac{b^2}{a} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{a} Z_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & 0 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & a & b \\ 0 & -\frac{b^2}{a} & b & a - \frac{b^2}{a} \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4 + \frac{b^2}{a} Z_2]{Z_3 - bZ_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & 0 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a & 2b \\ 0 & 0 & b & a - 2\frac{b^2}{a} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{a} Z_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & 0 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2\frac{b}{a} \\ 0 & 0 & b & a - 2\frac{b^2}{a} \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_4 - bZ_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & 0 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2\frac{b}{a} \\ 0 & 0 & 0 & a - 4\frac{b^2}{a} \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

$$\xrightarrow{Z_1-\frac{b}{a}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2\frac{b}{a} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2\frac{b}{a} \\ 0 & 0 & 0 & a-4\frac{b^2}{a} \end{pmatrix}$$

Falls $a^2 = 4b^2$, dann sind wir fertig. Ansonsten berechnen wir weiter

$$B \xrightarrow{\cdots} \cdots \xrightarrow{\frac{a}{a^2-4b^2}Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2\frac{b}{a} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2\frac{b}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{Z_1-2\frac{b}{a}Z_4 \\ Z_2+Z_4 \\ Z_3-2\frac{b}{a}Z_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$