Serie 11:
Lineare Gleichungssysteme, Gauss-Elimination & LR-Zerlegung

1. In dieser Aufgabe beweisen wir die Existenz der LR-Zerlegung einer quadratischen Matrix. Diese für die Numerik wichtige Methode erlaubt das schnelle und numerisch exakte Lösen linearer Gleichungssysteme und geht zurück auf Alan Turing. Der Beweis ist *konstruktiv* in dem Sinne, dass er eine Vorgehensweise liefert, um die LR-Zerlegung einer quadratischen Matrix zu bestimmen. Auf ähnliche Weise erhalten wir eine Vorgehensweise, um die Zeilenstufenform einer Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ zu bestimmen.

a) Betrachten Sie die Menge

$$N := \left\{ U_v := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & I_n \end{pmatrix} \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{K}) \mid v \in \mathbb{K}^n \right\}$$

und zeigen Sie, dass N mit der üblichen Matrixmultiplikation eine Gruppe ist. Bestimmen Sie U_v^{-1} für beliebige $v \in \mathbb{K}^n$.

b) Zeigen Sie, dass für $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ Matrizen $L, R, P \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ existieren, so dass $PA = LR$, wobei L eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen, R eine obere Dreiecksmatrix und P eine Permutationsmatrix, d.h. ein Produkt von Elementarmatrizen vom Typ I sind.

Hinweis: Beweisen Sie die Aussage mittels Induktion über die Anzahl Zeilen von A. Beginnen Sie den Induktionsschritt wie folgt: Wenn $A_{11} \neq 0$, dann finden Sie eine untere Dreiecksmatrix L, so dass

$$LA = \begin{pmatrix} A_{11} & w^T \\ 0_{n-1,1} & B \end{pmatrix}$$

wobei $B \in M_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K})$, $w \in \mathbb{K}^{n-1}$ und $0_{n-1,1} \in \mathbb{K}^{n-1}$ der Nullvektor ist. Nach Induktionsannahme gilt die Aussage für B. Ein Problem taucht jetzt auf, wenn $B_{11} = 0$, dann müssten Sie Zeilen von B vertauschen. Die entsprechende Permutationsmatrix und L kommutieren im Allgemeinen nicht, aber was können Sie darüber aussagen? Konstruieren Sie aus den Beobachtungen den vollständigen Induktionsbeweis.

$^\heartsuit$**c)** Ist die LR-Zerlegung, sprich P, L, R mit $PA = LR$, eindeutig durch A bestimmt? Finden Sie im Beweis von Teilaufgabe 1.b) den Schritt, wo Sie eine Wahl treffen und formulieren Sie ein hinreichendes Kriterium, damit

1. L und R durch A und P eindeutig bestimmt sind.
2. P und L durch A und R eindeutig bestimmt sind.

Finden Sie ein $n \in \mathbb{N}$, einen Körper $\mathbb{K}$ sowie $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ – die das gefundene hinreichende Kriterium erfüllt – und eine untere Dreiecksmatrix $L \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ so dass

$$PA = LR \quad \text{und} \quad P'A = LR'$$

für verschiedene Permutationsmatrizen $P, P' \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und verschiedene obere Dreiecksmatrizen $R, R' \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

d) Finden Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 10 & 8 \\ 1 & 4 & 6 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

2. a) Gehen Sie ähnlich vor wie in Aufgabe 1. und beweisen Sie die Existenz der Zeilenstufenform einer Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, d.h. zeigen Sie, dass für jede Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ eine endliche Folge elementarer Zeilenumformungen existiert, die A in eine Matrix $A' \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ überführen, so dass

1. Der erste von null verschiedene Eintrag jeder Zeile ist eine Eins und in dieser Spalte sind alle anderen Einträge Nullen.
2. Der erste von null verschiedene Eintrag jeder Zeile steht in einer Spalte rechts des ersten von null verschiedenen Eintrags in der darüberliegenden Zeile.

Bemerkung: Man beachte, dass die obigen beiden Bedingungen implizieren, dass alle Nullzeilen zuunterst stehen.

b) Bringen Sie die Zeilenstufenform der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 10 & 8 \\ 1 & 4 & 6 & 8 & 11 \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

3. **a)** Finden Sie in $\mathbb{R}^4$ alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ 3x_2 - 4x_3 + \ \ 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + \ \ 9x_2 - 2x_3 - 11x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 12x_2 - 6x_3 - \ \ 8x_4 &= 0 \\ 2x_1 + \ \ 6x_2 + 2x_3 - 14x_4 &= 0 \end{aligned}$$

b) Verwenden Sie Teilaufgabe (a) um alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems zu bestimmen:

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ 3x_2 - 4x_3 + \ \ 3x_4 &= 9 \\ 3x_1 + \ \ 9x_2 - 2x_3 - 11x_4 &= -3 \\ 4x_1 + 12x_2 - 6x_3 - \ \ 8x_4 &= 6 \\ 2x_1 + \ \ 6x_2 + 2x_3 - 14x_4 &= -12 \end{aligned}$$

4. Sei $W \subseteq \mathbb{R}^4$ der Unterraum

$$W := \operatorname{span}\left\{ v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Finden Sie ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsraum W ist.

b) Bestimmen Sie alle Basen von W enthalten in $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

5. Für reelle Zahlen a, b führen Sie die folgende reelle 4×4 Matrix in Zeilenstufenform über:

$$B = \begin{pmatrix} a & b & 0 & b \\ b & a & b & 0 \\ 0 & b & a & b \\ b & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

6. Online Abgabe Serie 11:

1. Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

in $M_{3\times 3}(\mathbb{Q})$. Dann existiert $U \in M_{3\times 3}(\mathbb{Q})$, so dass $UA = B$ und

(a) U eine obere Dreiecksmatrix ist.

(b) U eine untere Dreiecksmatrix ist.

(c) U eine Permutationsmatrix ist.

(d) U nicht-invertierbar ist.

2. Für welche Werte $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= b_1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= b_2 \\ 4x_2 - 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

lösbar?

(a) Für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$

(b) Für keine $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$

(c) Für alle b_1, b_2, b_3 mit $b_3 + b_2 - b_1 = 0$.

(d) Für alle b_1, b_2, b_3 mit $b_3 + b_2 - b_1 \neq 0$.

(e) Das lässt sich nicht entscheiden.

Siehe nächstes Blatt!

3. Das durch die erweiterte Matrix definierte lineare Gleichungssystem

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

hat

(a) genau den Lösungsvektor $\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(b) genau den Lösungsvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$.

(c) genau den Lösungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(d) keine Lösung.

(e) Keine der anderen genannten Möglichkeiten ist korrekt.

4. Für die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und den reellen Vektor $b = (1, 2, 0)^T$ hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$

(a) keine Lösung

(b) eine eindeutige Lösung

(c) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter

(d) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern

5. Für die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hat das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$

(a) keine Lösung

(b) eine eindeutige Lösung

(c) eine Lösungsmenge mit 1 freien Parameter

(d) eine Lösungsmenge mit 2 freien Parametern

6. Seien A, B $m \times n$-Matrizen. Dann ist $\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = Bx\}$ ein Unterraum von $\mathbb{K}^n$.

(a) Falsch.

(b) Richtig.

7. Die Lösungsmenge eines Systems von m linearen Gleichungen in n Unbekannten ist ein Unterraum von $\mathbb{K}^n$.

(a) richtig

(b) falsch

8. *Prüfung Winter 2017:* Das inhomogene System $AX = b$ habe mindestens zwei Lösungen. Dann ist der Kern von L_A mindestens zweidimensional.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Siehe nächstes Blatt!

9. *Prüfung Winter 2017:* Sei $(A'|b')$ entstanden aus $(A|b)$ durch eine endliche Folge von elementaren Spaltenumformungen. Dann sind die Systeme $(A'|b')$ und $(A|b)$ äquivalent.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

10. *Prüfung Winter 2017:* Sei A eine $n \times n$ Matrix von Rang n. Dann ist die Zeilenstufennormalform von A die Identitätsmatrix I_n.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

11. *Prüfung Sommer 2017:* Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ mit $m < n$. Dann besitzt das System $Ax = 0$ nicht-triviale Lösungen.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

12. *Prüfung Sommer 2017:* Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

gilt $\dim(\mathrm{Ker}(L_A)) = 2$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Donnerstag, den 7. Dezember 11:00 Uhr vormittags im Raum HG J 68, in einem der Fächer beschriftet mit *Abgabe*.