Lösung Serie 12: Determinanten (Teil 1)

1. 1. Seien $A_{(1)} = (A_{11}, A_{12}), A'_{(1)} = (A'_{11}, A'_{12}), A_{(2)} = (A_{21}, A_{22}), A'_{(2)} = (A'_{21}, A'_{22})$ Zeilen in $\mathbb{K}^2$ und $c \in \mathbb{K}$. Dann gelten

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} cA_{(1)} + A'_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} =& \det\begin{pmatrix} cA_{11} + A'_{11} & cA_{12} + A'_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \\
=&(cA_{11} + A'_{11})A_{22} - A_{21}(cA_{12} + A'_{12}) \\
=&cA_{11}A_{22} - cA_{21}A_{12} + A'_{11}A_{22} - A_{21}A'_{12} \\
=&c\det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} A'_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} \\
\det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ cA_{(2)} + A'_{(2)} \end{pmatrix} =& \det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ cA_{21} + A'_{21} & cA_{22} + A'_{22} \end{pmatrix} \\
=&A_{11}(cA_{22} + A'_{22}) - (cA_{21} + A'_{21})A_{12} \\
=&cA_{11}A_{22} - cA_{21}A_{12} + A_{11}A'_{22} - A'_{21}A_{12} \\
=&c\det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A'_{(2)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. Man berechnet
$$\det(I_2) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

3. Sei $A = (A_1, A_2)$ eine Zeile in $\mathbb{K}$, dann ist
$$\det\begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix} = A_1A_2 - A_1A_2 = 0$$

Zur Bemerkung stellen wir fest, dass wegen der Multilinearität und dem soeben gezeigten gilt

$$0 = \det\begin{pmatrix} A_{(1)} + A_{(2)} \\ A_{(1)} + A_{(2)} \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

$$= \underbrace{\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(1)} \end{pmatrix}}_{=0} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(2)} \\ A_{(1)} \end{pmatrix} + \underbrace{\det \begin{pmatrix} A_{(2)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix}}_{=0}$$

$$= \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(2)} \\ A_{(1)} \end{pmatrix}$$

2. **a)** Wir wissen aus Serie 6, Aufgabe 1, dass $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{smallmatrix} \right) \right\}$ genau dann eine Basis von $\mathbb{K}^2$ ist, wenn $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \neq 0$, und da $\dim \mathbb{K}^2 = 2$, sind zwei Vektoren genau dann linear unabhängig, wenn Sie eine Basis bilden. Also sind die Zeilen $A_{(1)} = (A_{11}, A_{12})$ und $A_{(2)} = (A_{21}, A_{22})$ genau dann linear unabhängig, wenn für $A = \left(\begin{smallmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{smallmatrix} \right)$ gilt $\det(A) \neq 0$.

$A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ ist genau dann invertierbar, wenn die Spalten linear unabhängig sind, bzw. wenn $\dim \operatorname{Spaltenraum}(A) = 2$. Wegen

$$\dim \operatorname{Spaltenraum}(A) = \dim \operatorname{Zeilenraum}(A)$$

ist A also genau dann invertierbar, wenn die Zeilen von A linear unabhängig sind, also wenn $\det(A) \neq 0$.

In Aufgabe 3. beweisen wir die Formel

$$\det(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^{\natural} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix}$$

b) Wir berechnen

1. $\det(A) = -5 + 12 = 7$ und $\det(B) = -8 - 0 = -8$
2. $\det(C) = -5 + 12 = 7$ und $\det(D) = (35i + 14) - (-22 - 6i) = 36 + 41i$
3. $\det(E) = -5 + 12 = 7 \equiv 0 \mod 7$ und $\det(F) = 36 - 0 \equiv 1 \mod 7$

wobei wir für die letzten beiden Matrizen verwendet haben, dass für alle $a, b, c, d, n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$(a \mod n)(d \mod n) - (b \mod n)(c \mod n) = ad - bc \mod n$$

was in Serie 3 gezeigt wurde. Insbesondere sind alle Matrizen ausser E invertierbar.

3. 1. Wir berechnen

$$A^{\natural} A = \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} A_{22}A_{11} - A_{12}A_{21} & A_{22}A_{12} - A_{12}A_{22} \\ -A_{21}A_{11} + A_{11}A_{21} & -A_{21}A_{12} + A_{11}A_{22} \end{pmatrix} \\
&= (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})I_2 = \det(A)I_2 \\
AA^\natural &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} & -A_{11}A_{12} + A_{12}A_{11} \\ A_{21}A_{22} - A_{22}A_{21} & -A_{21}A_{12} + A_{22}A_{11} \end{pmatrix} \\
&= (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})I_2 = \det(A)I_2
\end{aligned}
$$

2. Wir berechnen

$$
\det(A^\natural) = A_{22}A_{11} - (-A_{21})(-A_{12}) = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} = \det(A)
$$

3. Sei $A^T = \left(\begin{smallmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{smallmatrix}\right)$, dann ist

$$
(A^T)^\natural = \begin{pmatrix} A'_{22} & -A'_{12} \\ -A'_{21} & A'_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{21} \\ -A_{12} & A_{11} \end{pmatrix} = (A^\natural)^T
$$

wie gewünscht.

4. **"$\Rightarrow$":** Sei $\det(A) = 0$. Falls $A = 0$, dann ist nichts zu zeigen. Sei also $A \neq 0$ und insbesondere $A^\natural \neq 0$. Wegen $\det(A) = 0$ ist $AA^\natural = 0$ und folglich $\mathrm{Ker}(L_A) \neq \{0\}$, also ist A nicht invertierbar.

   "$\Leftarrow$": Falls $\det(A) \neq 0$, dann ist

$$
(\det(A)^{-1}A^\natural)A = I_2
$$

   und folglich ist A invertierbar.

5. Wir verwenden die resultierende Formel aus Teil 3.1:

$$
\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}, \\
B^{-1} &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}, \\
C^{-1} &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}, \\
D^{-1} &= \frac{36 - 41i}{2977}\begin{pmatrix} 7i & -6 - 4i \\ 3 - i & 5 - 2i \end{pmatrix}, \\
F^{-1} &= \begin{pmatrix} 6 \mod 7 & 0 \mod 7 \\ -3 \mod 7 & 6 \mod 7 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

4. 1. Da die Nullmatrix eine Zeile von der Form $0 \cdot A_{(i)}$ enthält, wäre unter der Annahme der Multilinearität $\lambda = \delta(0) = 0\delta(0) = 0$. Das ist absurd.

Bitte wenden!

2. Wir multiplizieren die Zeile $A_{(1)}$ von A mit 0 und erhalten A' mit der gleichen zweiten Zeile wie A. Wäre δ multilinear, dann wäre

$$A_{22} = \delta(A') = 0\delta(A) = 0$$

   Das ist aber im Allgemeinen falsch, beispielsweise für $A = I_3$.

3. Man überrüft:

$$\begin{aligned}
\delta \begin{pmatrix} cA_{(1)} + A'_{(1)} \\ A_{(2)} \\ A_{(3)} \end{pmatrix} &= (cA_{11} + A'_{11})A_{23}A_{32} \\
&= cA_{11}A_{23}A_{32} + A'_{11}A_{23}A_{32} \\
&= c\delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ A_{(3)} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} A'_{(1)} \\ A_{(2)} \\ A_{(3)} \end{pmatrix} \\
\delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ cA_{(2)} + A'_{(2)} \\ A_{(3)} \end{pmatrix} &= A_{11}(cA_{23} + A'_{23})A_{32} \\
&= cA_{11}A_{23}A_{32} + A_{11}A'_{23}A_{32} \\
&= c\delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ A_{(3)} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A'_{(2)} \\ A_{(3)} \end{pmatrix} \\
\delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} cA_{(3)} + A'_{(3)} \end{pmatrix} &= A_{11}A_{23}(cA_{32} + A'_{32}) \\
&= cA_{11}A_{23}A_{32} + A_{11}A_{23}A'_{32} \\
&= c\delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ A_{(3)} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ A'_{(3)} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4. Die Abbildung ist im Allgemeinen nicht multilinear. Sei beispielsweise $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Angenommen die Abbildung wäre multilinear, dann nehmen wir eine Matrix A mit $A_{11} = A_{31} = A_{33} = 1$ und multiplizieren die dritte Zeile mit 2 und erhalten so die Matrix A'. Für diese gilt

$$2 = 2\delta(A) = \delta(A') = A_{11}(2A_{31})(2A_{33}) = 4A_{11}A_{31}A_{33} = 4\delta(A) = 4$$

   Das ist absurd.

5. Die Abbildung ist im Allgemeinen nicht multilinear. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $A = I_3$. Wir multiplizieren die erste Zeile von A mit 2 um A' zu erhalten. Wäre δ multilinear, dann wäre

$$2 = 2\delta(A) = \delta(A') = (2A_{11})^2 A_{22}^2 A_{33}^2 = 4$$

   Das ist absurd.

Siehe nächstes Blatt!

5. Wir zeigen, dass die multilinearen Abbildungen einen Unterraum des Vektorraums aller Abbildungen von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ nach $\mathbb{K}$ bilden. Die 0-Abbildung ist sicherlich multilinear. Es bleibt also zu zeigen, dass für multilineare Abbildungen δ_1, δ_2 und $\lambda \in \mathbb{K}$ auch $\lambda\delta_1 + \delta_2$ multilinear ist. Wir berechnen

$$(\lambda\delta_1+\delta_2)\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ cA_{(i)} + A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = \lambda\delta_1 \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ cA_{(i)} + A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \delta_2 \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ cA_{(i)} + A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

$$= c\lambda\delta_1 \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \lambda\delta_1 \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + c\delta_2 \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \delta_2 \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

$$= c(\lambda\delta_1+\delta_2) \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + (\lambda\delta_1+\delta_2) \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

und folglich ist $\lambda\delta_1 + \delta_2$ ebenfalls multilinear, wie gewünscht.

Wir zeigen nun, dass auch die alternierenden multilinearen Abbildungen einen Unterraum bilden. Die Nullabbildung ist sicherlich alternierend. Es bleibt also nur, zu zeigen, dass für alternierende multilineare δ_1, δ_2 und für $\lambda \in \mathbb{K}$ auch $\lambda\delta_1 + \delta_2$ alternierend ist (die Multilinearität wurde gerade erst bewiesen). Wir berechnen unter der Annahme $A_{(i)} = A_{(i+1)}$

$$(\lambda\delta_1+\delta_2)\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = \lambda\delta_1 \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \delta_2 \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

$$= \lambda\,\underbrace{\delta_1 \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ A_{(i+1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}}_{=0} + \underbrace{\delta_2 \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ A_{(i+1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}}_{=0} = 0$$

und somit ist $\lambda\delta_1 + \delta_2$ alternierend.

Bitte wenden!

6. Die Idee ist wie folgt: man bemerkt zuerst, dass eine Wahl zweier verschiedener Spalten der Wahl einer Kopie von $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ in $M_{2\times n}(\mathbb{K})$ entspricht. Die Restriktion einer multilinearen Abbildung auf diese Kopie von $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ definiert eine alternierende multilineare Abbildung $M_{2\times 2}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ und wegen der Eindeutigkeit der Determinanten ist diese Restriktion von der Form $\lambda \det$, für ein $\lambda \in \mathbb{K}$. Andererseits ist die 2×2-Determinante definiert auf zwei Spalten – also gegeben durch ignorieren aller ausser zwei Spalten – eine alternierende Bilinearform auf $M_{2\times n}(\mathbb{K})$. Es gibt $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten, zwei verschiedene Spalten zu wählen und wir behaupten folglich, dass die 2×2-Determinanten auf $M_{2\times n}(\mathbb{K})$ gegeben durch ignorieren aller ausser zweier Spalten eine Basis von $\mathrm{Alt}_2(\mathbb{K})$ bilden.

Gegeben die Beobachtung von oben, definiere

$$\delta_{j_1,j_2} : M_{2\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \quad (1 \leq j_1 < j_2 \leq n)$$

für $A \in M_{2\times n}(\mathbb{K})$ durch $\delta_{j_1,j_2}(A) : A_{1j_1}A_{2j_2} - A_{2j_1}A_{1j_2}$. Dann ist $\delta_{j_1,j_2} \in \mathrm{Alt}_2(\mathbb{K})$. (Beachten Sie: Im Folgenden ist δ_{kl} das Kronecker-Delta und $\delta_{k,l}$ ein Element in $\mathrm{Alt}_2(\mathbb{K})$; ein weiterer Beleg für die enorme Wichtigkeit korrekter Interpunktion.) Wir zeigen, dass diese Abbildungen linear unabhängig sind. Seien $\{\lambda_{j_1,j_2} \mid 1 \leq j_1 < j_2 \leq n\}$, so dass

$$0 = \sum_{1\leq j_1<j_2\leq n} \lambda_{j_1,j_2}\delta_{j_1,j_2}$$

Betrachte die Matrix $A \in M_{2\times n}(\mathbb{K})$ mit $A_{ij} = \delta_{i1}\delta_{jk} + \delta_{i2}\delta_{jl}$ für $1 \leq k < l \leq n$, d.h. A enthält verteilt auf die beiden Spalten k und l eine Kopie von I_2 und ist sonst überall 0. Dann ist

$$\begin{aligned}
\delta_{j_1,j_2}(A) =& A_{1j_1}A_{2j_2} - A_{2j_1}A_{1j_2} \\
=& (\delta_{11}\delta_{j_1k} + \delta_{12}\delta_{j_1l})(\delta_{21}\delta_{j_2k} + \delta_{22}\delta_{j_2l}) \\
& - (\delta_{21}\delta_{j_1k} + \delta_{22}\delta_{j_1l})(\delta_{11}\delta_{j_2k} + \delta_{12}\delta_{j_2l}) \\
=& \delta_{j_1k}\delta_{j_2l} - \delta_{j_1l}\delta_{j_2k} = \delta_{j_1k}\delta_{j_2l}
\end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Gleichung die Annahmen $j_1 < j_2$ und $k < l$ kombiniert haben. Somit ist $\delta_{j_1,j_2}(A) = 1$ falls $j_1 = k$ und $j_2 = l$ und 0 sonst. Also ist $\lambda_{k,l} = 0$. Es folgt die lineare Unabhängigkeit.

Es bleibt zu zeigen, dass sich jede Abbildung $\delta \in \mathrm{Alt}_2(\mathbb{K})$ als Summe der Elemente δ_{j_1,j_2}, $1 \leq j_1 < j_2 \leq n$ schreiben lässt. Sei hierfür $\mathcal{E}_n = (e_1, \ldots, e_n)$ die geordnete Standardbasis. Dann ist

$$\begin{aligned}
\delta(A) =& \delta\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} = \delta\begin{pmatrix} \sum_{j_1=1}^n A_{1j_1}e_{j_1} \\ \sum_{j_2=1}^n A_{2j_2}e_{j_2} \end{pmatrix} \\
=& \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n A_{1j_1}A_{2j_2} \underbrace{\delta\begin{pmatrix} e_{j_1} \\ e_{j_2} \end{pmatrix}}_{=:\lambda_{j_1,j_2}(\delta)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{1\le j_1<j_2\le n} \lambda_{j_1,j_2}(\delta) A_{1j_1}A_{2j_2} + \sum_{1\le j_2<j_1\le n} \lambda_{j_1,j_2}(\delta) A_{1j_1}A_{2j_2} \quad \text{(da } \lambda^\delta_{j,j} = 0\text{)} \\
&= \sum_{1\le j_1<j_2\le n} \lambda_{j_1,j_2}(\delta) A_{1j_1}A_{2j_2} + \sum_{1\le j_1<j_2\le n} \underbrace{\lambda_{j_2,j_1}(\delta)}_{=-\lambda^\delta_{j_1,j_2}} A_{1j_2}A_{2j_1} \\
&= \sum_{1\le j_1<j_2\le n} \lambda_{j_1,j_2}(\delta)(A_{1j_1}A_{2j_2} - A_{1j_2}A_{2j_1}) \\
&= \sum_{1\le j_1<j_2\le n} \lambda_{j_1,j_2}(\delta)\delta_{j_1,j_2}(A)
\end{aligned}
$$

Da die Koeffizienten $\lambda_{j_1,j_2}(\delta)$ durch δ vollständig bestimmt sind, d.h. von A unabhängig waren, folgt also

$$\delta = \sum_{1\le j_1<j_2\le n} \lambda_{j_1,j_2}(\delta)\delta_{j_1,j_2}$$

wie gewünscht.

Da bekanntlich $\binom{n}{2}$ genau die Anzahl Möglichkeiten ist, zwei verschiedene Spalten einer Matrix $A \in M_{2\times n}(\mathbb{K})$ auszuwählen, folgt $\dim \mathrm{Alt}_2(\mathbb{K}) = \binom{n}{2}$.