Serie 12:
Determinanten (Teil 1)

1. Beweisen Sie Thm. 1, §4.1: Zeigen Sie, dass die Determinante $\det : M_{2\times 2}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ eine normierte alternierende Multilinearform ist, d.h.

1. $\forall A_{(1)}, A'_{(1)}, A_{(2)}, A'_{(2)} \in \mathbb{K}^2, \forall c \in \mathbb{K}$:

$$\det \begin{pmatrix} cA_{(1)} + A'_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} = c \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A'_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix}$$
$$\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ cA_{(2)} + A'_{(2)} \end{pmatrix} = c \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A'_{(2)} \end{pmatrix}$$

d.h. $\det$ ist linear in den Zeilen von $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$.

2. $\det$ ist normiert, d.h. $\det(I_2) = 1$.

3. $\det$ ist alternierend, d.h.

$$\forall A \in \mathbb{K}^2 : \det \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} = 0$$

Bemerkung: Motivieren Sie die Bezeichnung, indem Sie daraus schliessen, dass gilt
$$\forall A_{(1)}, A_{(2)} \in \mathbb{K}^2 : \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} A_{(2)} \\ A_{(1)} \end{pmatrix}$$

2. **a)** Zeigen Sie, dass die Zeilen einer Matrix A genau dann linear unabhängig sind, wenn $\det(A) \neq 0$. Folgern Sie daraus, dass $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ genau dann invertierbar ist, wenn $\det(A) \neq 0$.

Bitte wenden!

b) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen und bestimmen Sie, welche Matrizen invertierbar sind:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\
C &= \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} 5-2i & 6+4i \\ -3+i & 7i \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \\
E &= \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \mod 7 \text{ und } F = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \mod 7 \in M_{2\times 2}(\mathbb{F}_7)
\end{aligned}$$

$^\heartsuit$**3.** Sei $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$. Die *Adjunkte* von A ist die Matrix $A^\natural$ gegeben durch

$$A^\natural := \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Adjunkten:

1. $A^\natural A = AA^\natural = \det(A) I_2$
2. $\det(A^\natural) = \det(A)$
3. $(A^T)^\natural = (A^\natural)^T$
4. Folgern Sie aus dem oben gezeigten, dass $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ genau dann invertierbar ist, wenn $\det(A) \neq 0$ und bestimmmen Sie für invertierbare A die Inverse A^{-1} abhängig von $A^\natural$.
5. Bestimmen Sie die Inversen der Matrizen aus Teilaufgabe 2.b).

4. Welche der folgenden Abbildungen $\delta : M_{3\times 3}(\mathbb{K})$ sind 3-linear?

1. $\exists \lambda \in \mathbb{K}^\times \forall A \in M_{3\times 3}(\mathbb{K}) : \delta(A) = \lambda$
2. $\forall A \in M_{3\times 3}(\mathbb{K}) : \delta(A) = A_{22}$
3. $\forall A \in M_{3\times 3}(\mathbb{K}) : \delta(A) = A_{11}A_{23}A_{32}$
4. $\forall A \in M_{3\times 3}(\mathbb{K}) : \delta(A) = A_{11}A_{31}A_{32}$
5. $\forall A \in M_{3\times 3}(\mathbb{K}) : \delta(A) = A_{11}^2 A_{22}^2 A_{33}^2$

5. Zeigen Sie, dass die Menge der multilinearen Abbildungen $M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ mit punktweiser Addition und punktweiser skalarer Multiplikation ein Vektorraum ist. Zeigen Sie zudem, dass die Menge der alternierenden multilinearen Abbildungen ein Unterraum ist.

Siehe nächstes Blatt!

***6.** Sei $\mathrm{Alt}_2(\mathbb{K}^n)$ der Vektorraum der alterniernden, 2-linearen (üblicherweise *bilinearen*) Abbildungen von $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}$ mit $n \geq 2$. D.h. $\delta \in \mathrm{Alt}_2(\mathbb{K}^n)$ ist eine Abbildung $\delta : M_{2\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, so dass

1. wann immer $c \in \mathbb{K}$ und $A_{(1)}, A'_{(1)}, A_{(2)}, A'_{(2)}$ Zeilen aus $\mathbb{K}^n$ sind, dann gelten

$$\begin{aligned}\delta\begin{pmatrix} cA_{(1)} + A'_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} &= c\delta\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} A'_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} \\ \delta\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ cA_{(2)} + A'_{(2)} \end{pmatrix} &= c\delta\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A'_{(2)} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2. wann immer $A \in \mathbb{K}^n$ eine Zeile ist, dann folgt

$$\delta\begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} = 0$$

Folgern Sie aus der Eindeutigkeit der 2×2-Determinante, dass $\dim \mathrm{Alt}_2(\mathbb{K}^n) = \binom{n}{2}$.

Bitte wenden!

7. Online Abgabe Serie 12:

1. Sei $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 4$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) $\det \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = 8.$

(b) $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{pmatrix} = 4.$

(c) $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c+2a & d+2b \end{pmatrix} = 4.$

(d) $\det \begin{pmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = 12.$

2. Sind die beiden Spalten einer 2×2 -Matrix A identisch, so gilt $\det(A) = 0$

(a) richtig

(b) falsch

3. Sei A eine reelle 2×2-Matrix, $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die zugehörige lineare Abbildung. Dann ist

(a) $\dim \mathrm{Ker} L_A = 2 - \det(A)$

(b) $\dim \mathrm{Ker} L_A = 1 \Rightarrow \det(A) = 0$

(c) $\dim \mathrm{Ker} L_A = 1 \Rightarrow \det(A) = 1$

(d) $\dim \mathrm{Ker} L_A = 2 - \mathrm{Rang} L_A$

(e) $\dim \mathrm{Ker} L_A = 2 \Leftrightarrow A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right).$

Siehe nächstes Blatt!

4. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Die Abbildung $\det : M_{2\times 2}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ ist linear.

(a) Richtig

(b) Falsch

5. Seien $u, v \in \mathbb{R}^2$ Vektoren mit Anfangspunkt im Ursprung, dann ist die Fläche des Parallelograms mit benachbarten Seiten u und v gegeben durch

$$\det \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

(a) Richtig

(b) Falsch

6. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und seien zwei Zeilen von A identisch, dann ist $\det(A) = 0$.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

7. Sei $B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ erhalten aus $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ mittels Vertauschung zweier Zeilen. Dann gilt $\det(B) = -\det(A)$.

(a) Richtig

(b) Falsch

8. Die Abbildung $\delta : M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $A \mapsto \delta(A) := 0$ ist eine Determinante.

(a) Richtig

(b) Falsch

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Donnerstag, den 14. Dezember 11:00 Uhr vormittags im Raum HG J 68, in einem der Fächer beschriftet mit *Abgabe*.