Lösung Serie 13:
Determinanten (Teil 2)

1. **a)** Wir zeigen die gewünschten Eigenschaften:

1. Es ist
$$\varepsilon(\mathrm{id}) = \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\mathrm{id}(j)-\mathrm{id}(i)}{j-i} = \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{j-i}{j-i} = 1.$$

2. Es ist
$$\begin{aligned}\varepsilon(\tau\circ\sigma) &= \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{j-i} = \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}\\ &= \left(\prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)}\right)\left(\prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}\right)\\ &=\varepsilon(\sigma)\left(\prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)}\right)\end{aligned}$$

und es reicht also zu zeigen, dass für alle $\tau,\sigma\in S_n$ die Gleichung
$$\varepsilon(\tau) = \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)}$$
gilt.
Hierfür bemerken wir, dass für alle $1\leq k<l\leq n$ gilt
$$\frac{\tau(k)-\tau(l)}{k-l} = \frac{\tau(l)-\tau(k)}{l-k}.$$
Die Abbildung $\{(i,j)\mid 1\leq i<j\leq n\}\to\{(\sigma(i),\sigma(j))\mid 1\leq i<j\leq n\}$ gegeben durch $(i,j)\mapsto(\sigma(i),\sigma(j))$ ist sicherlich injektiv, denn $(\sigma(i),\sigma(j)) = (\sigma(k),\sigma(l))$ impliziert $\sigma(i)=\sigma(k)$ und $\sigma(j)=\sigma(l)$ und

folglich $i = k$ und $j = l$, da σ injektiv ist. Seien $1 \leq k < l \leq n$, dann ist genau eines der Tupel (k, l) oder (l, k) im Bild der Abbildung enthalten. Seien nämlich $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$ die eindeutigen Elemente, sodass $\sigma(i) = k$ und $\sigma(j) = l$, dann ist (k, l) genau dann im Bild enthalten, wenn $i < j$, bzw. (l, k) genau dann im Bild enthalten, wenn $j < i$ gilt. Insbesondere ist also

$$\prod_{\{(\sigma(i),\sigma(j)) | 1 \leq i < j \leq n\}} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} = \prod_{\{(i,j) | 1 \leq i < j \leq n\}} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i}$$

und somit folgt die Behauptung.

3. Wir beweisen dies mittels Induktion über n. Falls $n = 2$ ist, dann ist

$$\varepsilon(\tau) = \frac{1 - 2}{2 - 1} = -1,$$

da $\tau(1) = 2$, $\tau(2) = 1$ die einzige Transposition auf der Menge $\{1, 2\}$ ist.
Sei die Aussage also wahr für Transpositionen auf der Menge S_n und sei $\tau \in S_{n+1}$ eine Transposition. Falls $\tau(n+1) = n+1$, dann gilt

$$\begin{aligned}\varepsilon(\tau) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} \\ &= \underbrace{\left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} \right)}_{= \varepsilon(\tau|_{\{1,\ldots,n\}})} \underbrace{\left(\prod_{1 \leq i \leq n} \frac{n + 1 - \tau(i)}{n + 1 - i} \right)}_{=1} = -1,\end{aligned}$$

da $\tau|_{\{1,\ldots,n\}}$ nach Voraussetzung ein Element in S_n und eine Transposition ist.
Sei nun also $\tau(n+1) = i$ für ein $1 \leq i \leq n$. Dann ist

$$\begin{aligned}\varepsilon(\tau) &= \left(\prod_{1 \leq k \leq n} \frac{i - \tau(k)}{n + 1 - k} \right) \left(\prod_{1 \leq k < l \leq n} \frac{\tau(l) - \tau(k)}{l - k} \right) \\ &= \left(\prod_{1 \leq k \leq n} \frac{i - \tau(k)}{n + 1 - k} \right) \left(\prod_{i < l \leq n} \underbrace{\frac{\tau(l) - n + 1}{l - i}}_{= \frac{n+1-l}{i-l}} \right) \left(\prod_{1 \leq k < i} \underbrace{\frac{n + 1 - \tau(k)}{i - k}}_{= \frac{n+1-k}{i-k}} \right) \\ &= \frac{i - n + 1}{n + 1 - i} \left(\prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \frac{i - k}{n + 1 - k} \right) \left(\prod_{i < k \leq n} \frac{n + 1 - k}{i - k} \right) \left(\prod_{1 \leq k < i} \frac{n + 1 - k}{i - k} \right) \\ &= \frac{i - n + 1}{n + 1 - i} = -1,\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass für $1 \leq k < l \leq n$ gilt $\frac{\tau(l) - \tau(k)}{l - k} = 1$ ausser genau eines der k oder l ist gleich i.

Siehe nächstes Blatt!

4. Falls $n = 1$, dann ist per definitionem

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le 1} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \quad (\sigma \in S_1)$$

ein Produkt über die leere Menge, und somit $\varepsilon(S_n) = \{1\}$. Sei also $n \ge 2$. Wir zeigen, dass sich jedes Element in $S_n \setminus \{\mathrm{id}\}$ als Komposition von Transpositionen schreiben lässt.
Sei $\sigma \in S_n$, dann ist $D(\sigma) = \{i \mid \sigma(i) \ne i\}$ die Menge der nicht-Fixpunkte von σ und $N(\sigma) = |D(\sigma)|$ die Kardinalität dieser Menge. Beachte, dass $\sigma \ne \mathrm{id} \Rightarrow N(\sigma) \ge 2$, denn für $i \in D(\sigma)$ gilt $\sigma(i) \in D(\sigma)$ wegen der Injektivität von σ. Wir beweisen die Aussage mittels Induktion über $N(\sigma)$. Falls $N(\sigma) = 2$ ist, dann ist σ eine Transposition und wir sind fertig.
Sei also $m \in \mathbb{N}$ und es gelte, dass sich jedes Element $\sigma' \in S_n$ mit $N(\sigma') \le m$ als Komposition von Transpositionen schreiben lässt. Sei $\sigma \in S_n$ mit $N(\sigma) \le m + 1$ und sei $i \in D(\sigma)$. Sei $j = \sigma(i)$. Definiere eine Transposition

$$\tau(k) = \begin{cases} i & \text{falls } k = j \\ j & \text{falls } k = i \\ k & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt $N(\tau \circ \sigma) < N(\sigma)$. Sei nämlich $k \notin D(\sigma)$, dann ist $\tau \circ \sigma(k) = \tau(k)$ und da $i \in D(\sigma)$ und somit $j = \sigma(i) \in D(\sigma)$, ist $k \notin \{i, j\}$ und folglich $\tau(k) = k$. Insbesondere also $\tau \circ \sigma(k) = k$ und somit ist $D(\tau \circ \sigma) \subset D(\sigma)$ (da wie eben gezeigt $D(\sigma)^c \subset D(\tau \circ \sigma)^c$). Andererseits ist $i \in D(\sigma)$, aber

$$\tau \circ \sigma(i) = \tau(j) = i$$

nach Definition. Also ist $i \notin D(\tau \circ \sigma)$ und folglich $D(\tau \circ \sigma) \ne D(\sigma)$. Es folgt also $N(\tau \circ \sigma) \le m$ und folglich lässt sich $\tau \circ \sigma$ als Produkt von Transpositionen schreiben. Da die Inverse einer Transposition wieder die Transposition ist, lässt sich folglich σ als Produkt von Transpositionen schreiben. Die Aussage folgt nun aus dem Induktionsaxiom.
Aus 2. folgt nun die Behauptung.

b) Wir zeigen, dass die Formel auf der rechten Seite die definierenden Eigenschaften der Determinante besitzt.

- Zuerst bemerken wir, dass für $A = I_n$ gilt

$$A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)} \ne 0 \Leftrightarrow \forall 1 \le i \le n : \sigma(i) = i$$

und wegen Eigenschaft 1 folgt also für $A = I_n$ dass

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)} = 1.$$

Bitte wenden!

- Wir zeigen die Multilinearität. Sei $A' = (A'_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ eine weitere Matrix und es gelte für ein $1 \le j \le n$ und ein $1 \le i \le n$, dass $A'_{jl} = A_{jl} + \lambda B_{jl}$ für alle $1 \le l \le n$ und ein $\lambda \in \mathbb{K}$, d.h. A' ist aus A entstanden durch Addition des λ-fachen der Zeile $B_{(j)}$ zur Zeile $A_{(j)}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) A'_{1\sigma(1)} \cdots A'_{n\sigma(n)} \\
&\quad= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots (A_{j\sigma(j)} + \lambda B_{j\sigma(j)}) \cdots A_{n\sigma(n)} \\
&\quad= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)} \\
&\qquad\quad + \lambda \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots B_{j\sigma(j)} \cdots A_{n\sigma(n)}.
\end{aligned}$$

  Dies zeigt die Multilinearität.
- Wir zeigen, dass die Formel alternierend ist. Es sei $A_{(i)} = A_{(j)}$ und $\tau \in S_n$ die Transposition gegeben durch $\tau(i) = j$ und $\tau(j) = i$ für $i < j$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)} &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma\circ\tau) A_{1\sigma(\tau(1))} \cdots A_{i\sigma(\tau(i))} \cdots A_{i\sigma(\tau(j))} \cdots A_{n\sigma(\tau(n))} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma\circ\tau) A_{1\sigma(1)} \cdots A_{i\sigma(j)} \cdots A_{i\sigma(i)} \cdots A_{n\sigma(n)} \\
&= -\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots A_{i\sigma(i)} \cdots A_{i\sigma(j)} \cdots A_{n\sigma(n)}
\end{aligned}$$

  wegen Eigenschaft 3. Somit ist die Formel alternierend wenn $2 \neq 0$ ist.
  Es bleibt, die Aussage im Falle $2 = 0$ zu beweisen. Hierfür liefern wir ein Argument, das auch im Allgemeinen Fall funktioniert, aber ein bisschen komplizierter ist. Sei τ wie oben. Wir betrachten die Menge

$$\Delta_\tau = \{\{\sigma, \sigma\circ\tau\} \mid \sigma \in S_n\} \subset \mathbb{P}S_n.$$

  Man beachte, dass jedes Element in Δ_τ zwei Elemente enthält, denn es gilt

$$\sigma = \sigma\circ\tau \Rightarrow \mathrm{id} = \sigma^{-1}\circ\sigma = \sigma^{-1}\circ(\sigma\circ\tau) = (\sigma^{-1}\circ\sigma)\circ\tau = \tau.$$

  Das ist absurd.
  Angenommen $\{\sigma, \varrho\}, \{\hat\sigma, \hat\varrho\} \in \Delta_\tau$ und es gilt $\{\sigma, \varrho\} \cap \{\hat\sigma, \hat\varrho\} \neq \emptyset$. Nach Umbenennung können wir annehmen, dass $\sigma = \hat\sigma$ und dass $\varrho = \sigma\circ\tau$. Wir zeigen, dass $\varrho = \hat\varrho$ gilt. Per definitionem ist entweder $\hat\varrho = \hat\sigma\circ\tau$ oder $\hat\sigma = \hat\varrho\circ\hat\tau$. Da $\tau^{-1} = \tau$, folgt im zweiten Falle, dass

$$\hat\varrho = \hat\varrho\circ(\tau\circ\tau) = (\hat\varrho\circ\tau)\circ\tau = \hat\sigma\circ\tau$$

Siehe nächstes Blatt!

und wir können o.B.d.A. annehmen, dass $\hat{\varrho} = \hat{\sigma} \circ \tau$ gilt. Somit folgt aber nach Voraussetzung, dass

$$\hat{\varrho} = \hat{\sigma} \circ \tau = \sigma \circ \tau = \varrho$$

und folglich $\{\sigma, \varrho\} = \{\hat{\sigma}, \hat{\varrho}\}$. Dies zeigt, dass die Elemente von Δ_τ disjunkt sind. Per definitionem existiert für jedes $\sigma \in S_n$ ein $A \in \Delta_\tau$, sodass σ in A ist. Also ist Δ_τ eine Partition von S_n und es folgt

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)} = \sum_{A \in \Delta_\tau} \underbrace{\sum_{\sigma \in A} \varepsilon(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)}}_{=0} = 0.$$

Die Formel definiert eine alternierende, normierte Multilinearform auf $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und stimmt somit wegen der Eindeutigkeit der Determinanten mit der Determinanten überein.

2. Falls $\delta(I_n) \in \mathbb{K}^\times$, dann ist $\delta(I_n)^{-1}\delta$ eine Determinante und somit $\delta = \delta(I_n)\det$.

Sei also $\delta(I_n) = 0$. Wir befolgen den Hinweis: Sei P eine Permutationsmatrix, d.h. es gibt $j_1, \ldots, j_n \in \{1, \ldots, n\}$ paarweise verschieden,[1] so dass

$$P = \begin{pmatrix} e_{j_1}^T \\ \vdots \\ e_{j_n}^T \end{pmatrix}$$

wobei $\mathcal{E}_n = (e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$ ist. Seien $1 \leq k < l \leq n$ und sei P' die Permutationsmatrix, die aus P durch Vertauschung der k-ten und der l-ten Zeile entsteht. Dann ist

$$0 = \delta \begin{pmatrix} e_{j_1}^T \\ \vdots \\ e_{j_{k-1}}^T \\ e_{j_k}^T + e_{j_l}^T \\ e_{j_{k+1}}^T \\ \vdots \\ e_{j_{l-1}}^T \\ e_{j_k}^T + e_{j_l}^T \\ e_{j_{l+1}}^T \\ \vdots \\ e_{j_n}^T \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} e_{j_1}^T \\ \vdots \\ e_{j_{k-1}}^T \\ e_{j_k}^T \\ e_{j_{k+1}}^T \\ \vdots \\ e_{j_{l-1}}^T \\ e_{j_k}^T \\ e_{j_{l+1}}^T \\ \vdots \\ e_{j_n}^T \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} e_{j_1}^T \\ \vdots \\ e_{j_{k-1}}^T \\ e_{j_k}^T \\ e_{j_{k+1}}^T \\ \vdots \\ e_{j_{l-1}}^T \\ e_{j_l}^T \\ e_{j_{l+1}}^T \\ \vdots \\ e_{j_n}^T \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} e_{j_1}^T \\ \vdots \\ e_{j_{k-1}}^T \\ e_{j_l}^T \\ e_{j_{k+1}}^T \\ \vdots \\ e_{j_{l-1}}^T \\ e_{j_k}^T \\ e_{j_{l+1}}^T \\ \vdots \\ e_{j_n}^T \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} e_{j_1}^T \\ \vdots \\ e_{j_{k-1}}^T \\ e_{j_l}^T \\ e_{j_{k+1}}^T \\ \vdots \\ e_{j_{l-1}}^T \\ e_{j_l}^T \\ e_{j_{l+1}}^T \\ \vdots \\ e_{j_n}^T \end{pmatrix}$$

[1] D.h. $j : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, $i \mapsto j_i$ ist eine Bijektion – eine sog. Permutation, da sie die Elemente von $\{1, \ldots, n\}$ umordnet/permutiert

Bitte wenden!

$$=0+\delta(P)+\delta(P')+0$$

Insbesondere ist also $\delta(P') = -\delta(P)$. Wir zeigen nun, dass jede Permutationsmatrix durch eine Folge von Vertauschungen zweier Zeilen aus I_n entsteht, und per Induktion gilt dann $\delta(P) = \pm\delta(I_n)$.

Sei also eine Permutation von $\{1, \dots, n\}$ wie oben gegeben, und sei P die entsprechende Permutationsmatrix. Wir wenden Vertauschungen zweier Zeilen an, welche nacheinander angewandt die Permutationsmatrix $P^T = (e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$ in I_n überführen. Falls $P_{(i)} = e_i^T$ für alle $1 \leq i \leq n$, dann ist $P = I_n$ und wir sind fertig. Andernfalls existiert ein $1 \leq i \leq n$, so dass $P_{(i)} \neq e_i^T$. Sei $1 \leq i^* \leq n$ mit $P_{(i)} = i^*$. Da P eine Permutationsmatrix ist, existiert per definitionem ein Zeilenindex $1 \leq i' \leq n$, so dass $P_{(i')} = e_i^T$ und nach Annahme ist $i' \neq i$. Nach Vertauschung der Zeilen i und i' von P entsteht $\tilde{P}$ mit $\tilde{P}_{(i)} = e_i^T$, $\tilde{P}_{(i')} = e_{i^*}^T$ und $\tilde{P}_{(k)}$ sonst. Die relevante Erkenntnis hier ist, dass $P_{(i')} \neq e_{i'}^T$, d.h. nach Vertauschung ist die Zeile i' von $\tilde{P}$ im schlimmsten Fall immer noch falsch, die Anzahl der "falschen" Zeilen in $\tilde{P}$ ist also strikt kleiner als in P, bzw. formaler

$$\{i \mid P_{(i)} \neq e_i^T\} > \{i \mid \tilde{P}_{(i)} \neq e_i^T\}$$

Man wendet nun Schritt für Schritt Vertauschungen von falschen Zeilen wie oben an, wobei sich in jedem Schritt die Anzahl falscher Zeilen um mindestens eins verringert. Da P höchstens n falsche Zeilen besitzt, hat man nach $k \leq n$ Vertauschungen P in I_n überführt. Insbesondere ist $\delta(P) = (-1)^k\delta(I_n) = 0$ nach Voraussetzung.

Da δ alternierend und weil wegen obigem Argument $\delta(P) = 0$ für alle Permutationsmatrizen ist, folgt aus $\delta(I_n) = 0$ also

$$\delta \begin{pmatrix} e_{j_1}^T \\ \vdots \\ e_{j_n}^T \end{pmatrix} = 0$$

für alle $j_1, \dots, j_n \in \{1, \dots, n\}$.

Daraus folgt für allgemeine Matrizen $A \in M_{n\times n}$:

$$\delta(A) = \delta \begin{pmatrix} \sum_{j_1=1}^n A_{1j_1} e_{j_1}^T \\ \vdots \\ \sum_{j_n=1}^n A_{1j_n} e_{j_n}^T \end{pmatrix} = \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_n=1}^n A_{1j_1} \cdots A_{nj_n} \underbrace{\delta \begin{pmatrix} e_{j_1}^T \\ \vdots \\ e_{j_n}^T \end{pmatrix}}_{=0} = 0$$

und folglich ist $\delta = 0 = 0\det$ wie gewünscht.

Siehe nächstes Blatt!

3. **a)** Wir berechnen

$$\begin{aligned}(A^\natural A)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} A^\natural_{ik} A_{kj}\\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} A_{kj} \det(\tilde{A}_{ki})\end{aligned}$$

Insbesondere ist also $(A^\natural A)_{jj} = \varepsilon_j(A)$ und wegen der Eindeutigkeit der Determinanten also $(A^\natural A)_{jj} = \det(A)$. Sei also $i \neq j$. Dann ist die Abbildung

$$\eta_{i,j,k}(A) := A_{kj} \det(\tilde{A}_{ki})$$

multilinear in den Zeilen von A und alternierend. Also ist nach Aufgabe (1) $\eta_{i,j,k}(A) = c \det(A)$ für ein $c \in \mathbb{K}$ abhängig von i, j, k, aber unabhängig von A. Insbesondere ist $\eta_{i,j,k}(I_n) = c$. Angenommen $\eta_{i,j,k}(I_n) \neq 0$, dann ist $(I_n)_{kj} \neq 0$, und also $k = j$, und auch $\det(\widetilde{(I_n)_{ki}}) \neq 0$, und also $i = k$. Da nach Annahme $i \neq j$, folgt $\eta_{i,j,k}(I_n) = 0$ und also $c = 0$. Es folgt $(A^\natural A)_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und folglich die Behauptung.

b) Wenn $\det(A) \neq 0$, dann ist $I_n = \frac{1}{\det(A)} A^\natural$, und somit folgt aus $\det(A) \neq 0$, dass A invertierbar ist mit $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^\natural$.

c) Man beachte, dass $\widetilde{A^T}_{ji} = (\tilde{A}_{ij})^T$ und folglich ist

$$(-1)^{i+j} \det(\widetilde{A^T}_{ji}) = (-1)^{j+i} \det\left((\tilde{A}_{ij})^T\right) = (-1)^{j+i} \det(\tilde{A}_{ij})$$

Insbesondere ist also

$$\left((A^T)^\natural\right)_{ij} = (-1)^{j+i} \det(\tilde{A}_{ij}) = \left((A^\natural)^T\right)_{ij}$$

d) Falls A^T invertierbar ist, dann ist $\det(A) \neq 0$ und

$$I_n = \frac{1}{\det(A)} (A^T)^\natural A^T = \frac{1}{\det(A)} (A^\natural)^T A^T$$

und wegen Linearität der Transposition und wegen Eindeutigkeit der Inversen ist also $(A^T)^{-1} = \left(\frac{1}{\det(A)} A^\natural\right)^T = (A^{-1})^T$.

e) Wenn man obige Erkenntnis verwenden will, dann berechnet man die Determinante sowie die Kofaktoren von A. Hier lässt sich die Berechnung der Determinante mittels elementarer Zeilenumformungen bedeutend erleichtern

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 6 & 18 \\ 4 & -3 & 9 & 6 & 10 \\ -2 & 4 & -6 & -1 & -1 \\ -6 & 11 & -23 & -14 & 9 \end{vmatrix} \overset{\substack{Z_5+Z_1\\ Z_5+Z_2\\ Z_5-Z_4}}{=} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 6 & 18 \\ 4 & -3 & 9 & 6 & 10 \\ -2 & 4 & -6 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & -6 & 32 \end{vmatrix}$$

$$\overset{Z_4+Z_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 6 & 18 \\ 4 & -3 & 9 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -11 & -6 & 32 \end{vmatrix} \overset{Z_5-Z_4}{=} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 6 & 18 \\ 4 & -3 & 9 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -6 & 29 \end{vmatrix}$$

$$\underset{Z_3-2Z_1}{\overset{Z_2-Z_1}{=}} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 14 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -6 & 29 \end{vmatrix} \overset{Z_3-3Z_4}{=} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -6 & 29 \end{vmatrix}$$

$$= 2 * \begin{vmatrix} 0 & -4 & 5 & 14 \\ 0 & 2 & 4 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -10 & -6 & 29 \end{vmatrix} = 2 * \begin{vmatrix} -4 & 5 & 14 \\ 2 & 4 & -7 \\ -10 & -6 & 29 \end{vmatrix}$$

$$\underset{Z_3+5Z_2}{\overset{Z_1+2Z_2}{=}} 2 * \begin{vmatrix} 0 & 13 & 0 \\ 2 & 4 & -7 \\ 0 & 14 & -6 \end{vmatrix} = -4(-13 * 6) = 312$$

Ähnlich berechnet man die Kofaktoren und findet

$$A^{-1} = \frac{1}{312} \begin{pmatrix} -5832 & -4 & 1396 & -4760 & 520 \\ 402 & -46 & -14 & 406 & 26 \\ 2142 & -34 & -458 & 1738 & -182 \\ -264 & 24 & 48 & -144 & 0 \\ 684 & 4 & -148 & 548 & -52 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Wie in diesem Beispiel ersichtlich, ist Inversion unter Verwendung der Adjunkten (genannt die Cramer'sche Regel) meist nicht einfacher oder schneller als Inversion mittels Gausselimination – die Berechnung von Determinanten ist numerisch aufwendig und tatsächlich verwenden viele Implementationen die Gausselimination um die Determinante aus einer oberen Dreiecksmatrix ablesen zu können. Die Cramer'sche Regel ist allerdings von grosser Bedeutung für die Theorie der Lie Gruppen und algebraischer Gruppen.

4. Sei $n = 1$, dann ist $A_n = (b)$ und also

$$\det(A_n) = b = (b-a)^0(b + 0 * a)$$

wie gewünscht.

Für $n \geq 2$ subtrahieren wir die erste Zeile von allen anderen Zeilen und erhalten eine

Siehe nächstes Blatt!

Matrix A der Form

$$A_{ij} = \begin{cases} b & \text{falls } i = j = 1 \\ a & \text{falls } i = 1, j \neq 1 \\ a-b & \text{falls } j = 1, i \neq 1 \\ b-a & \text{falls } i \neq 1, i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

D.h. die erste Zeile von A ist von der Form $(b, a, \dots, a)$, die erste Spalte von A ist von der Form $(b, a-b, \dots, a-b)$ und im Block unterhalb der ersten Zeile und rechts der ersten Spalte steht eine Diagonalmatrix mit Werten $b-a$ auf der Diagonalen. Man beachte, dass die Determinante unter diesen Operationen erhalten bleibt.

Nun addieren wir von der zweiten bis und mit der letzten alle Spalten zur ersten Spalte und eliminieren so alle ausser dem ersten Eintrag in der ersten Spalte, d.h. wir erhalten eine neue Matrix A der Form

$$A_{ij} = \begin{cases} b+(n-1)a & \text{falls } i = j = 1 \\ a & \text{falls } i = 1, j \neq 1 \\ b-a & \text{falls } i \neq 1, i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Auch diese Operationen lassen die Determinante unverändert.

In der Notation für elementare Zeilen- und Spaltenumformungen sind diese beiden Schritte gegeben wie folgt:

$$\begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix} \xrightarrow[1<i\leq n]{Z_i - Z_1} \begin{pmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ a-b & b-a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a-b & 0 & \cdots & 0 & b-a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_1 + (S_2 + \cdots + S_n)} \begin{pmatrix} b+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & b-a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b-a \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist aber eine obere Dreiecksmatrix und somit ist die Determinante das Produkt der Diagonaleinträge, und folglich

$$\det(A_n) = (b+(n-1)a)(b-a)^{n-1}$$

wie gewünscht.

Bitte wenden!

5. **a)** Zuerst bemerken wir folgendes: Entwicklung nach der ersten Spalte zeigt, dass $\det\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & D\end{smallmatrix}\right) = \det(D)$, wann immer $D \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$ und per Induktion folgt nach Entwicklung nach der ersten Spalte, dass auch $\det\left(\begin{smallmatrix}I_n & 0\\ 0 & D\end{smallmatrix}\right) = \det(D)$. Analog zeigt man, dass $\det\left(\begin{smallmatrix}A & 0\\ 0 & I_m\end{smallmatrix}\right) = \det(A)$ für $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dies ist unabhängig von n, m.

Insbesondere folgt für $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und $D \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$, dass

$$\det\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & D\end{pmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & I_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}\right) = \det(A)\det(D)$$

Wir lösen nun die Aufgabe.

Seien $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ und $D \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$. Aus Serie 11 wissen wir, dass invertierbare Matrizen $Q_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $Q_2 \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ existieren, so dass $Q_1 A$ und $Q_2 D$ obere Dreiecksmatrizen sind. Es gilt

$$\det\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & D\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}Q_1^{-1} & 0\\ 0 & Q_2^{-1}\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}Q_1A & Q_1B\\ 0 & Q_2D\end{pmatrix}$$

Da $\left(\begin{smallmatrix}Q_1A & Q_1B\\ 0 & Q_2D\end{smallmatrix}\right)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, ist die Determinante das Produkt der Diagonaleinträge, und dasselbe gilt für die Matrizen Q_1A sowie Q_2D. Insbesondere ist also

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & D\end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix}Q_1^{-1} & 0\\ 0 & Q_2^{-1}\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}Q_1A & Q_1B\\ 0 & Q_2D\end{pmatrix}\\ &= \det\begin{pmatrix}Q_1^{-1} & 0\\ 0 & Q_2^{-1}\end{pmatrix}\det(Q_1A)\det(Q_2D)\\ &= \det(A)\det(D)\end{aligned}$$

wegen der gezeigten Eigenschaft für Blockdiagonalmatrizen.

b) Man bemerkt

$$\begin{pmatrix}I_m & -A\\ B & I_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_m & -A\\ 0 & I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_m + AB & 0\\ B & I_n\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}I_m & -A\\ B & I_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_m & 0\\ B & I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_m & -A\\ 0 & I_n + BA\end{pmatrix}$$

Insbesondere ist also nach Teilaufgabe (a)

$$\begin{aligned}\det(I_m + AB) &= \det\begin{pmatrix}I_m & -A\\ 0 & I_n\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}I_m + AB & 0\\ B & I_n\end{pmatrix}\\ &= \det\begin{pmatrix}I_m & 0\\ B & I_n\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}I_m & -A\\ 0 & I_n + BA\end{pmatrix}\\ &= \det(I_n + BA)\end{aligned}$$

Somit folgt die Aussage aus Teilaufgabe (a).

Siehe nächstes Blatt!

c) Man berechnet

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ C & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

und somit folgt die Aussage aus Teilaufgabe (a).

6. **a)** Es gilt $\det(A^T) = \det(A) = \det(-A^T) = (-1)^n \det(A)$. Wenn n ungerade ist, dann folgt also $\det(A) = -\det(A)$ und folglich $\det(A) = 0$.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$, dann ist $A^T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{smallmatrix}\right) = -A$, also ist A schiefsymmetrisch und $A(-A) = I_{2n}$, also ist A invertierbar und insbesondere $\det(A) \neq 0$.