Serie 13:
Determinanten (Teil 2)

1. Für $n \in \mathbb{N}$ sei S_n die Gruppe der Permutationen auf der Menge $\{1, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$ (vgl. Analysis, Kapitel 3.3). Ein Element $\tau \in S_n$ heisst *Transposition*, falls $1 \leq i < j \leq n$ existieren, sodass gilt

$$\tau(k) = \begin{cases} j & \text{falls } k = i \\ i & \text{falls } k = j \\ k & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Sei $\varepsilon : S_n \to \mathbb{R}$ die Abbildung

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \quad (\sigma \in S_n).$$

Zeigen Sie

1. Es ist $\varepsilon(\mathrm{id}) = 1$.
2. Für alle $\sigma, \tau \in S_n$ gilt $\varepsilon(\tau \circ \sigma) = \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)$.
3. Sei $\tau \in S_n$ eine Transposition, dann gilt $\varepsilon(\tau) = -1$.
4. Für alle $\sigma \in S_n$ ist $\varepsilon(\sigma) \in \{\pm 1\}$.

♡**b)** Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)}.$$

2. Sei $\delta : M_{n \times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ multilinear und alternierend (d.h. nicht notwendigerweise normiert). Zeigen Sie, dass $\delta = c \det$ für ein $c \in \mathbb{K}$, d.h. der Vektorraum der alternierenden multilinearen Abbildungen von $M_{n \times n}(\mathbb{K})$ nach $\mathbb{K}$ hat Dimension 1.

Bitte wenden!

Hinweis: Nehmen Sie zuerst an, dass $\delta(I_n) \neq 0$ und zeigen Sie, dass in diesem Falle die Behauptung ein Korollar der Eindeutigkeit der Determinanten ist. Zeigen Sie anschliessend, dass $\delta(I_n) = 0 \Rightarrow \delta = 0$, indem Sie $\delta(P)$ für Permutationsmatrizen $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ bestimmen.

3. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Für $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ sei $A^\natural \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ die *Adjunkte* von A definiert durch

$$A^\natural_{ij} := (-1)^{i+j}\det(\tilde{A}_{ji})$$

wobei $\tilde{A}_{ji} \in M_{n-1\times n-1}(\mathbb{K})$ die Matrix erhalten aus A nach Streichung der i-ten Spalte und der j-ten Zeile ist.

a) Zeigen Sie, dass $A^\natural A = \det(A) I_n$.

b) Folgern Sie, dass $\det(A) \neq 0$ impliziert, dass $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertierbar ist. Bestimmen Sie in diesem Falle A^{-1}.

c) Zeigen Sie, dass $(A^T)^\natural = (A^\natural)^T$ ist.

d) Folgern Sie für invertierbare A^T, dass $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

e) Berechnen Sie die Inverse von $A := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 6 & 18 \\ 4 & -3 & 9 & 6 & 10 \\ -2 & 4 & -6 & -1 & -1 \\ -6 & 11 & -23 & -14 & 9 \end{pmatrix}$.

4. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $a, b \in \mathbb{K}$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Sei A_n die Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix}$$

Das heisst, für alle $n \geq 1$ ist

$$\forall 1 \leq i, j \leq n:\ (A_n)_{ij} = \begin{cases} b & \text{falls } i = j \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie

$$\forall n \in \mathbb{N}:\ \det(A_n) = (b-a)^{n-1}\big(b + (n-1)a\big)$$

Siehe nächstes Blatt!

5. **a)** Seien $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, $C \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $D \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$. Zeigen Sie

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D) = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie die Identität von Sylvester, d.h. zeigen Sie, dass für alle $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ gilt:

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA)$$

Hinweis: Zerlegen Sie die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{smallmatrix}\right)$ auf zwei verschiedene Arten in ein Produkt von Blockdreiecksmatrizen und berechnen Sie die Determinante.

c) Seien $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, $C \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $D \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$. Zeigen Sie die Identität von Schur

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$$

Hinweis: Zerlegen Sie $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ in ein Produkt einer einfachen Blockdiagonalmatrix und Dreiecksmatrizen.

6. Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ heisst *schiefsymmetrisch*, falls $A^T = -A$.

a) Zeigen Sie, dass für ungerade $n \in \mathbb{N}$ und schiefsymmetrische $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ gilt $\det(A) = 0$.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade. Finden Sie eine schiefsymmetrische Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, so dass $\det(A) \neq 0$.

Bitte wenden!

7. Online Abgabe Serie 13:

1. Für welche Werte von a besitzt das folgende Gleichungssystem eine nicht-triviale Lösung in $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{aligned} ax + \ \ y \qquad\ &= 0 \\ -x + ay - 2z &= 0 \\ x \qquad\ + \ \ z &= 0 \end{aligned}$$

(a) $a = 0$

(b) $a = 1$

(c) $a = 2$

(d) $a = \sqrt{2}$

2. Die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 4

(e) 8

Siehe nächstes Blatt!

3. Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige Matrizen A und B aus $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $n \geq 2$ korrekt?

(a) Es gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(b) Aus $\det(A) \neq 0$ folgt, dass die Spaltenvektoren $A^{(1)}, \cdots, A^{(n)}$ von A linear unabhängig sind.

(c) Es gilt $\det(AB) = \det(BA)$.

(d) Für jede von Null verschiedene reelle Zahl λ gilt $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.

(e) Es gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

4. Welche der folgenden Aussagen über 3×3-Matrizen ist falsch?

(a) Die Determinante ist invariant unter Transposition.

(b) Die Determinante des λ-fachen einer Matrix ist das λ-fache der Determinante der Matrix.

(c) Nach Vertauschung der ersten und dritten Spalte einer Matrix wechselt das Vorzeichen der Determinante.

(d) Subtraktion der zweiten Zeile von der ersten Zeile lässt die Determinante unverändert.

(e) Nach Ersetzen der ersten Spalte durch die zweite wird die Determinante 0.

5. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = 1$$

(a) $x = 0$

(b) $x = 1$

(c) $x = 2$

(d) Keiner der obigen Vorschläge ist richtig.

6. *Prüfung Winter 2017:* Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dann gilt $\det(A^T) = -\det(A)$.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

7. *Prüfung Winter 2017:* Sei E eine Elementarmatrix, so gilt $\det(E) = \pm 1$.

(a) Richtig

(b) Falsch

8. *Prüfung Sommer 2017:* Es gibt eine invertierbare, reelle 3×3 Matrix, die schiefsymmetrisch ist.

(a) Richtig

(b) Falsch

9. *Prüfung Sommer 2017:* Seien $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ und $m > n$. Dann gilt $\det(AB^T) = 0$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

10. *Prüfung Sommer 2017:* Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

11. *Prüfung Sommer 2017:* Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, dann gilt

$$\det(A + B) = \det(B + A).$$

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Diese Serie wird nicht korrigiert.