Serie 14:
Eigenwerte und Eigenvektoren

1. Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Paare von Matrizen über dem angegebenen Körper zueinander ähnlich sind.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ und $A_1 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{C}$.
2. $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{C}$.
3. $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ und $C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$.
4. $D_1 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ und $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Q}$.

2. Drücken Sie für eine beliebige Matrix $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ das charakteristische Polynom von A^{-1} in Termen des charakteristischen Polynoms von A aus. Worin besteht der Zusammenhang zwischen Eigenwerten von A und Eigenwerten von A^{-1}.

3. Es sei $D = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Finden Sie Bedingungen an a, b, c, d, so dass die Matrix D

a) zwei verschiedene,

b) genau einen,

c) keinen reellen Eigenwert besitzt.

Bitte wenden!

4. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $A_\alpha \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A_α invertierbar?

b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A_α in Abhängigkeit von α.

c) Berechnen Sie $\det A_\alpha$ und vergleichen Sie die Determinante mit dem Produkt der Eigenwerte (inkl. Vielfachheiten).

$^\heartsuit$**5.** Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $T \in \operatorname{End}(V)$. Für $\lambda \in \mathbb{K}$ definieren wir

$$E_\lambda(T) = \{v \in V \mid Tv = \lambda v\}.$$

Falls $V = \mathbb{K}^n$ und $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist, dann schreiben wir $E_\lambda(A)$ für $E_\lambda(L_A)$.

a) Zeigen Sie, dass $E_\lambda(T)$ ein Unterraum ist.

Sei V endlichdimensional, $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V. Gegeben eine Teilmenge $S \subseteq V$ sei $[S]_\mathcal{B} \subseteq K^{\dim V}$ das Bild von S unter der Koordinatenwahl $\mathcal{B}$.

b) Sei $T \in \operatorname{End}(V)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass gilt $[E_\lambda(T)]_\mathcal{B} = E_\lambda([T]_\mathcal{B})$.

6. Seien $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ und

$$W_\lambda = \{v \in \mathbb{K}^n | \exists r \in \mathbb{N} \cup \{0\} : (L_A - \lambda I_{\mathbb{K}^n})^r(v) = 0\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $W_\lambda \subseteq \mathbb{K}^n$ ein Unterraum ist.

b) Sei $B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und nehmen Sie an, dass B mit A kommutiert. Zeigen Sie, dass W_λ invariant ist unter L_B, i.e. $L_B(W_\lambda) \subseteq W_\lambda$.

Bemerkung: W_λ heisst Hauptraum zum Eigenwert λ (engl: generalized eigenspace) und die Elemente $v \in W_\lambda$ heissen Hauptvektoren (engl: generalized eigenvectors). Diese Begriffe werden später in der Vorlesung eine wichtige Rolle beim Bestimmen der Jordanschen Normalform spielen.

Siehe nächstes Blatt!

7. Online Abgabe Serie 14:

1. Die Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $AX = b$ für eine quadratische Matrix A und einen Vektor b sei $x = -b$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) b ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A.

(b) b ist ein Eigenvektor zum Eigenwert -1 von A.

(c) $-b$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A.

(d) b ist kein Eigenvektor von A.

(e) $-b$ ist kein Eigenvektor von A.

(f) Keine der Aussagen ist richtig.

2. Betrachte die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und die Vektoren $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) v_1 ist ein Eigenvektor von A.

(b) v_2 ist ein Eigenvektor von A.

(c) v_1 und v_2 sind beides Eigenvektoren von A.

(d) Weder v_1 noch v_2 ist ein Eigenvektor von A.

Bitte wenden!

3. Betrachte die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und die Vektoren $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) v_1 ist ein Eigenvektor von A.

(b) v_2 ist ein Eigenvektor von A.

(c) v_1 und v_2 sind beides Eigenvektoren von A.

(d) Weder v_1 noch v_2 ist ein Eigenvektor von A.

4. Es existiert eine quadratische Matrix über $\mathbb{R}$, die keine Eigenvektoren besitzt.

(a) richtig

(b) falsch

5. Je zwei Eigenvektoren der gleichen Matrix sind linear unabhängig.

(a) richtig

(b) falsch

6. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Seien v_1, v_2 verschiedene Eigenvektoren von T, so ist ihre Summe ebenfalls ein Eigenvektor von T.

(a) richtig

(b) falsch

7. Ähnliche Matrizen haben die gleiche Eigenwerte.

(a) richtig

(b) falsch

Siehe nächstes Blatt!

8. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt für alle $n \geq 1$?

(a) Wenn eine $n \times n$-Matrix nur zu sich selbst ähnlich ist, dann ist sie die Einheitsmatrix.

(b) Die reellen Matrizen $(i \cdot \delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ und $((n-i) \cdot \delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ sind ähnlich.

(c) Zwei $n \times n$-Matrizen sind ähnlich genau dann, wenn sie dasselbe charakteristische Polynom haben.

(d) Sind zwei $n \times n$-Matrizen A und B ähnlich, dann sind auch A^k und B^k ähnlich für alle $k \geq 0$.

(e) Keine der Aussagen ist richtig.

9. Welche der folgenden Endomorphismen von $\mathbb{R}^3$ haben nicht einen Eigenwert gleich 1?

(a) Rotation um die y-Achse mit Winkel $90°$.

(b) Reflexion an der x-Achse.

(c) Streckung um Faktor 2.

(d) Projektion bezüglich yz-Ebene.

(e) Reflexion an der xz-Ebene.

(f) Alle der oben aufgelisteten Endomorphismen haben einen Eigenwert gleich 1.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Donnerstag, den 22. Februar 14:00 Uhr im Raum HG J 68, in einem der Fächer beschriftet mit *Abgabe*.