Lösung Serie 15:
Ferienserie

1. **a)** Setze

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in M_{5\times 3}(\mathbb{Q})$$

und sei $x^T = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{Q}^3$ beliebig, dann ist $T(x) = L_A(x)$. Da x beliebig war ist T linear.

b) Wir erinnern uns, dass für $F \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{Q})$ gilt $\mathrm{Ker}(L_A) = \mathrm{Ker}(L_{FA})$ und wenden also elementare Zeilenumformungen auf A an:

$$A \xrightarrow[\substack{Z_4+Z_1 \\ Z_5-3Z_1}]{\substack{Z_2-2Z_1 \\ Z_3-2Z_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_4-2Z_3 \\ Z_5+2Z_3}]{Z_1-Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da der Rang unter elementaren Zeilenumformungen invariant ist, sehen wir, dass $\mathrm{Rang}(A) = 2$ gilt und folglich

$$\mathrm{nullity}(T) = \dim \mathbb{Q}^3 - \mathrm{Rang}(T) = 3 - \mathrm{Rang}(L_A) = 3 - \mathrm{Rang}(A) = 1$$

Jeder Vektor $(x_1, x_2, x_3)^T$ im Kern erfüllt gemäss der ersten Zeile der reduzierten Matrix $x_1 + x_3 = 0$ und gemäss der zweiten Zeile $x_2 + 2x_3 = 0$. Dies trifft beispielsweise auf den Vektor $v := (1, 2, -1)^T$ zu und folglich ist $\{v = (1, 2, -1)^T\}$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(T)$. Wir überprüfen – dies ist eigentlich bereits bewiesen, wir kontrollieren also nur auf Rechenfehler – zur Sicherheit noch, ob v tatsächlich in $\mathrm{Kern}(T)$ liegt:

$$T(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Da $\mathrm{Rang}(A) = 2$ und da $\mathrm{Im}(T)$ das Erzeugnis der Spalten von A ist, reicht es, zwei linear unabhängige Spalten von A zu finden. Man beachte, dass eine Menge $\{u, v\}$ genau dann linear abhängig ist, wenn $u = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$. Folglich ist $\{A^{(1)}, A^{(2)}\}$ eine Basis von $\mathrm{Im}(T)$.

d) Wir wissen, dass

$$[T^*]_{\mathcal{C}^*}^{\mathcal{B}^*} = \left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^T = \left([I_{\mathbb{Q}^5}]_{\mathcal{E}_5}^{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_5}[I_{\mathbb{Q}^3}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3}\right)^T = \left([I_{\mathbb{Q}^3}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3}\right)^T A^T \left([I_{\mathbb{Q}^5}]_{\mathcal{E}_5}^{\mathcal{C}}\right)^T$$

Die Basiswechselmatrizen von einer Basis zur Standardbasis sind die Matrizen mit den entsprechenden Basisvektoren als Spalten. Entsprechend ist

$$[I_{\mathbb{Q}^3}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[I_{\mathbb{Q}^5}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}_5} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [I_{\mathbb{Q}^5}]_{\mathcal{E}_5}^{\mathcal{C}} = \left([I_{\mathbb{Q}^5}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}_5}\right)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

und folglich

$$[T^*]_{\mathcal{C}^*}^{\mathcal{B}^*} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 11 & 4 & -2 \\ 6 & -2 & 10 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

2. **a)** Wir verwenden $U + W \subseteq V \Rightarrow \dim(U+W) \leq \dim V$ und erhalten

$$\begin{aligned}\dim(U \cap W) &= \dim U + \dim W - \dim(U+W) \\ &\geq \dim U + \dim W - \dim V > \frac{n}{2} + \frac{n}{2} - n = 0\end{aligned}$$

und folglich ist $\dim(U \cap W) \geq 1$, also $U \cap W \neq \{0\}$.

b) Wir wissen

$$\begin{aligned}\dim\big((U+W)/W\big) &= \dim(U+W) - \dim W \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) - \dim W \\ &= \dim U - \dim(U \cap W) = \dim\big(U/(U \cap W)\big)\end{aligned}$$

und da alle involvierten Vektorräume endliche Dimension haben, ist $(U+W)/W \cong U/(U \cap W)$.

c) Sei $p : V \to V/W$ die Projektion $v \mapsto v + W$. Wir wissen, dass diese Abbildung ein Homomorphismus ist. Folglich ist $F := p^{-1}(E) \subseteq V$ ein Unterraum (siehe unten), und wegen $0 \in E$ gilt $W = \operatorname{Ker}(p) \subseteq p^{-1}(E)$. Es gilt sicher $p(p^{-1}(E)) \subseteq E$, und es bleibt somit zu zeigen, dass $p(p^{-1}(E)) = E$. Sei $x \in E$, dann ist $x = v + W$ für ein $v \in V$ und somit $x = p(v)$ für ein $v \in V$. Per definitionem ist $v \in p^{-1}(E)$ und also $x \in p(p^{-1}(E))$. Da x beliebig war, folgt $E \subseteq p(p^{-1}(E))$ und somit ist $p(F) = E$ wie gewünscht.

Behauptung: Seien X, Y Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$, sei $Z \subseteq Y$ ein Unterraum und sei $T \in \operatorname{Hom}(X, Y)$. Dann ist $T^{-1}(Z) \subseteq X$ ein Unterraum.

Beweis der Behauptung: Wegen $0 \in Z$ ist $\operatorname{Ker}(T) \subseteq T^{-1}(Z)$ und insbesondere $0 \in T^{-1}(Z)$, also ist $T^{-1}(Z) \neq \emptyset$. Seien $v_1, v_2 \in T^{-1}(Z)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann ist

$$T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2) \in Z,$$

da Z ein Unterraum ist, und folglich ist $v_1 + \lambda v_2 \in T^{-1}(Z)$ und $T^{-1}(Z)$ also ein Unterraum. $\square$

d) Es gilt

$$\begin{aligned}\dim\big((V/W)/(U/W)\big) &= \dim(V/W) - \dim(U/W) \\ &= \dim V - \dim W - \dim U + \dim W \\ &= \dim V - \dim U = \dim(V/U)\end{aligned}$$

und da alle involvierten Vektorräume von endlicher Dimension sind, folgt $(V/W)/(U/W) \cong V/U$.

Bitte wenden!

3. **a)** Im Folgenden seien Φ und Ψ wie in der Aufgabenstellung. Wir bemerken, dass $J_0^{-1} = -J_0$ und $J_0^T = -J_0$. Es gilt

$$(\Phi\Psi)^T J_0 (\Phi\Psi) = \Psi^T(\Phi^T J_0 \Phi)\Psi = \Psi^T J_0 \Psi = J_0$$

Falls Ψ invertierbar ist, dann ist auch Ψ^T invertierbar und

$$\Psi^T J_0 \Psi = J_0 \Rightarrow J_0 = (\Psi^T)^{-1} J_0 \Psi^{-1} = (\Psi^{-1})^T J_0 \Psi^{-1}$$

und folglich ist $\Psi^{-1} \in \mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$. Tatsächlich ist $\mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n}) \subseteq \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$, denn es gilt

$$\Psi^T J_0 \Psi = J_0 \Rightarrow -J_0 \Psi^T J_0 \Psi = I_{2n}$$

Insbesondere ist $\Psi^{-1} = -J_0 \Psi^T J_0$. Daraus folgern wir, dass $\Psi^T \in \mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$, denn wegen dem vorigen Reultat ist

$$\begin{aligned} J_0 =& (\Psi^{-1})^T J_0 \Psi^{-1} = (-J_0\Psi^T J_0)^T J_0 (-J_0 \Psi^T J_0) \\ =& J_0^T \Psi J_0^T J_0 J_0 \Psi^T J_0 = (-J_0)\Psi(-J_0)(-I_{2n})\Psi^T J_0 \\ =& -J_0 \Psi J_0 \Psi^T J_0 \\ \Rightarrow (\Psi^T)^T J_0 \Psi^T =& \Psi J_0 \Psi^T = J_0 J_0 (-J_0) = J_0 \end{aligned}$$

und folglich $\Psi^T \in \mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$.

b) Es ist klar, dass $I_{2n} \in \mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$, und folglich besitzt die Menge $\mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$ ein neutrales ELement. Wir haben in Teilaufgabe (a) gezeigt, dass die Menge unter Matrixmultiplikation abgeschlossen ist. Die Assoziativität der Verknüpfung folgt aus der Assoziativität der Matrixmultiplikation auf $M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$. Jedes Element in $\mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$ besitzt nach Teilaufgabe (a) ein inverses Element (nämlich das inverse Element bezüglich Matrixmultiplikation). Folglich ist $\mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$ eine Gruppe.

c) Wir haben in Teilaufgabe (a) eine Formel für Φ^{-1} angegeben; daraus folgt

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} =& -J_0 \Phi^T J_0 = -\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \\ =& -\begin{pmatrix} -B^T & -D^T \\ A^T & C^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -D^T & B^T \\ C^T & -A^T \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Insbesondere ist eine 2×2-Matrix $\Phi = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ genau dann symplektisch, wenn $\Phi^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$ und da im allgemeinen $\Phi^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$, ist dies genau dann der Fall, wenn $\det(\Phi) = ad - bc = 1$.

Siehe nächstes Blatt!

d) Wir wissen, dass $\det(\Phi^{-1}) = \det(\Phi)^{-1}$. Andererseits ist $\Phi^{-1} = -J_0\Phi^T J_0$ und folglich

$$\begin{aligned}\det(\Phi^{-1}) =&(-1)^{2n}\det(J_0\Phi^T J_0) = \det(J_0)^2\det(\Phi^T)\\ =&\det(-I_{2n})\det(\Phi) = (-1)^{2n}\det(\Phi) = \det(\Phi)\end{aligned}$$

Also gilt insbesondete $\det(\Phi)^{-1} = \det(\Phi)$ und folglich $\det(\Phi) \in \{\pm 1\}$.

4. a) Diese Matrix lässt sich ohne Anwendung von Permutationen zerlegen und man findet mit elementaren Zeilenoperationen

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & \frac{2}{9} & 1 & 0\\ 2 & \frac{1}{3} & \frac{3}{29} & 1\end{pmatrix}}_{=:L}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & -9 & 8 & -8\\ 0 & 0 & \frac{29}{9} & -\frac{29}{9}\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}}_{=:R}$$

b) Wegen Teilaufgabe (a) ist $\det(M) = \det(L)\det(R) = 87$ und also ist M invertierbar. Folglich ist $\mathcal{L}_{Mx=0} = \mathrm{Ker}(L_M) = \{0\}$.

5. a) Betrachten Sie die Standardbasis (e_1, e_2) von $\mathbb{R}^2$, dann ist $-\frac{1}{2}e_2 \in \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$, aber $e_1 - \frac{1}{2}e_2$ und $e_2 - \frac{1}{2}e_2 = \frac{1}{2}e_2$ sind linear unabhängig. Die Aussage ist also falsch.

b) Sei W Unterraum von V mit der geordneten Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, also insbesondere $W = \mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\}$. Sei $T \in \mathrm{End}(W)$ die eindeutige lineare Abbildung, für die gilt $T(v_1) = v_1 - v_2$, $T(v_2) = v_2 - v_3$ und $T(v_3) = v_1 + v_3$. Dann ist die Darstellungsmatrix von T gegeben durch

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Und insbesondere ist

$$\det(T) = 1 * \begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix} - (-1) * \begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} = 2$$

$\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_1 + v_3\}$ ist per definitionem genau dann linear unabhängig, wenn $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}$ linear unabhängig ist, also genau dann, wenn $[T]_{\mathcal{B}}$ vollen Rang besitzt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $[T]_{\mathcal{B}}$ invertierbar ist und also genau dann, wenn $2 \in \mathbb{K}^\times$, bzw. wenn $2 \neq 0$ gilt in $\mathbb{K}$.

Bitte wenden!

6. Wir addieren das 1000-fache der ersten, das 100-fache der zweiten sowie das 10-fache der dritten Spalte zur vierten Spalte und erhalten

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 9 & 6 \end{vmatrix} \underset{Z_4+10Z_3}{\overset{\substack{Z_4+1000Z_1\\Z_4+100Z_2}}{=}} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2014 \\ 1 & 4 & 8 & 1484 \\ 3 & 7 & 1 & 3710 \\ 6 & 9 & 9 & 6996 \end{vmatrix} = 106 * \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & n_1 \\ 1 & 4 & 8 & n_2 \\ 3 & 7 & 1 & n_3 \\ 6 & 9 & 9 & n_4 \end{vmatrix}$$

für $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{Z}$.

7. **a)** Es gilt $W(x_1) = (1)$, also ist $V(x_1) = 1$, und $W(x_1, x_2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{smallmatrix}\right)$, also ist $V(x_1, x_2) = x_2 - x_1$.

b) Wir subtrahieren die erste Zeile von allen anderen Zeilen in $W(x_1, \ldots, x_n)$ und erhalten die Matrix aus der Aufgabenstellung. Diese Operation lässt die Determinante unverändert und also folgt die Behauptung.

c) Wir verwenden Teilaufgabe (b) sowie Entwicklung nach der ersten Spalte und erhalten

$$\begin{aligned}
V(x_1, \ldots, x_n) &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & p_1(x_1, x_2) & \cdots & p_{n-2}(x_1, x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & p_1(x_1, x_n) & \cdots & p_{n-2}(x_1, x_n) \end{vmatrix} \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1) \\
&\underset{j=2,\ldots,n-1}{\overset{S_j - x_1^{j-1} S_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & x_2 p_0(x_1, x_2) & \cdots & x_2 p_{n-3}(x_1, x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n p_0(x_1, x_n) & \cdots & x_n p_{n-3}(x_1, x_n) \end{vmatrix} \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1) \\
&\underset{j=3,\ldots,n-1}{\overset{S_j - x_1^{j-2} S_2}{=}} \cdots \\
&\overset{S_{n-1} - x_1 S_{n-2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1) \\
&= V(x_2, \ldots, x_n) \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1)
\end{aligned}$$

wobei wir

$$p_l(x, y) = \sum_{k=0}^{l} x^k y^{l-k} = y^l + \sum_{k=1}^{l} x^k y^{l-k} = y^l + x p_{l-1}(x, y) = x^l + y p_{l-1}(x, y)$$

Siehe nächstes Blatt!

mit $p_0(x,y) = 1$ verwendet haben.

d) Dies folgt per Induktion. Für den Fall $n = 1$ stimmt die Aussage gemäss Teilaufgabe (a). Angenommen die Aussage gilt für $n \in \mathbb{N}$ Variablen. Aus Teilaufabe (c) folgt also

$$\begin{aligned} V(x_1, \dots, x_{n+1}) =& V(x_2, \dots, x_{n+1}) \prod_{2 \le j \le n+1} (x_j - x_1) \\ =& \prod_{2 \le i < j \le n+1} (x_j - x_i) \prod_{2 \le j \le n+1} (x_j - x_1) \\ =& \prod_{1 \le i < j \le n+1} (x_j - x_i) \end{aligned}$$

und also folgt die Behauptung.

e) Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^d$. Wir wählen $r_0, \dots, r_d \in \mathbb{Q}$ paarweise verschieden, dann ist nach Voraussetzung $p(r_i) \in \mathbb{Q}$ für alle $0 \le i \le d$. Insbesondere ist nach Teilaufgabe (d) $W(r_0, \dots, r_d) \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q})$ und also

$$W(r_0, \dots, r_d)^{-1} \begin{pmatrix} p(r_0) \\ \vdots \\ p(r_d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{d+1}$$

8. Um zu zeigen, dass es sich bei den gegebenen Vektoren um Basen handelt, müssen wir zeigen, dass der von ihnen erzeugte Unterraum volle Dimension hat bzw. dazu äquivalent, dass die Matrizen $A, B \in M_{4\times 4}(\mathbb{Q})$ mit $A^{(j)} = v_j$ und $B^{(j)} = w_j$ ($1 \le j \le 4$) vollen Rang haben.

Gauss Elimination liefert

$$\begin{aligned} A =& \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[2 \le j \le 4]{Z_j - jZ_1}& \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[Z_4 - 7Z_2]{Z_3 - 2Z_2}& \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bitte wenden!

$$\xrightarrow{Z_4+Z_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & -2 & -7\\ 0 & 0 & -4 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 40\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 3\\ 3 & 4 & 3 & 2\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[2\le j\le 4]{Z_j-jZ_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & -2 & -5\\ 0 & -2 & -6 & -10\\ 0 & -5 & -10 & -15\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_4-5Z_2]{Z_3-2Z_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & -2 & -5\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 10\end{pmatrix}$$

Folglich gilt $\mathrm{Rang}(A)=\mathrm{Rang}(B)=4$ und also sind $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ sowie $\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$ Basen von $\mathbb{Q}^4$.

Wir berechnen nun die Basiswechselmatrix. Sei $[v_j]_{\mathcal{C}}=(q_{1j},q_{2j},q_{3j},q_{4j})^T$, dann ist nach Definition der Matrixmultiplikation und von $[v_j]_{\mathcal{C}}$

$$\begin{aligned}L_B[v_j]_{\mathcal{C}} &= q_{1j}B^{(1)}+q_{2j}B^{(2)}+q_{3j}B^{(3)}+q_{4j}B^{(4)}\\ &= q_{1j}w_1+q_{2j}w_2+q_{3j}w_3+q_{4j}w_4=v_j\end{aligned}$$

Die Matrix $[I_{\mathbb{Q}^4}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ erfüllt also die Gleichung $B[I_{\mathbb{Q}^4}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}=A$, bzw. $[I_{\mathbb{Q}^4}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}=B^{-1}A$. Man sieht dies auch, indem man realisiert, dass $A=[I_{\mathbb{Q}^4}]^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{B}}$ und $B=[I_{\mathbb{Q}^4}]^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{C}}$, also insbesondere

$$[I_{\mathbb{Q}^4}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}=[I_{\mathbb{Q}^4}\circ I_{\mathbb{Q}^4}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}=[I_{\mathbb{Q}^4}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}_4}[I_{\mathbb{Q}^4}]^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{B}}=([I_{\mathbb{Q}^4}]^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{C}})^{-1}[I_{\mathbb{Q}^4}]^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{B}}=B^{-1}A$$

Wir berechnen also B^{-1}:

$$(B\mid I_4)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2\le j\le 4]{Z_j-jZ_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -6 & -10 & -3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -5 & -10 & -15 & -4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Siehe nächstes Blatt!

$$\xrightarrow[Z_4-5Z_2]{Z_3-2Z_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 6 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{10}Z_4]{\substack{-Z_2\\ -\frac{1}{2}Z_3}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/5 & -1/2 & 0 & 1/10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_1-4Z_4]{Z_2-5Z_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & -7/5 & 2 & 0 & -2/5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/5 & -1/2 & 0 & 1/10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_1-3Z_3]{Z_2-2Z_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1/10 & -1 & 3/2 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/5 & -1/2 & 0 & 1/10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1-2Z_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/10 & 0 & -1/2 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/5 & -1/2 & 0 & 1/10 \end{array}\right)$$

Also ist

$$[I_{\mathbb{Q}^4}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -5 \\ -5 & 10 & -5 & 0 \\ 6 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6/5 & 1 & 6/5 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1/5 & 0 & 11/5 \end{pmatrix}$$

9. **a)** Die erweiterte Koeffizientenmatrix zum gegebenen Gleichungssystem $Ax = b$ ist

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & u \\ a & 1 & a^2 & v \\ a^2 & a & 1 & w \end{array}\right)$$

Für $u = v = w = 2$ bemerken wir zuerst entweder durch Inspektion (sprich genaues hinsehen) oder durch explizite Rangberechnung die folgenden zwei Spezialfälle:

"$a = 1$": In diesem Falle ist

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Bitte wenden!

und also $1 = \mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A \mid b)$. Man überprüft, dass $(1,0,1)^T$ eine Lösung des Systems $Ax = b$ ist und dass $(1,-1,0)^T$ und $(1,0,-1)^T$ linear unabhängige Lösungen des zugehörigen homogenen Systems $Ax = 0$ sind. Da $\mathrm{nullity}(L_A) = 3 - \mathrm{Rang}(A) = 2$, folgt also

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

“$a = -1$”: In diesem Falle ist

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[Z_3 - Z_1]{Z_2 + Z_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2} Z_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{Z_1 - Z_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Folglich ist $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A \mid b) = 2$. Man überprüft, dass $(0,0,2)^T$ eine Lösung des Systems $Ax = b$ und dass $(1,1,0)^T$ eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems $Ax = 0$ ist. Wegen $\mathrm{nullity}(L_A) = 3 - \mathrm{Rang}(A)$ ist also

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Falls $a \notin \{\pm 1\}$, dann hat die Koeffizientenmatrix A vollen Rang und ist somit invertierbar, d.h. $Ax = b$ hat genau eine Lösung. Hierfür berechnen wir A^{-1} mittels Zeilenumformungen. Man beachte, dass das Polynom $a^2 + a + 1$ keine reellen Nullstellen besitzt, und deswegen $\alpha := \frac{1+a}{1+a+a^2} \in \mathbb{R}$ wohldefiniert ist (in Abhängigkeit von a).

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & a^2 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & a^2 & 0 & 1 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[Z_3 - a^2 Z_1]{Z_2 - a Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & a^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - a^2 & a^2(1-a) & -a & 1 & 0 \\ 0 & a(1-a^2) & 1 - a^4 & -a^2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{1-a^2} Z_3]{\frac{1}{1-a^2} Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & a^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a^2}{1+a} & -\frac{a}{1-a^2} & \frac{1}{1-a^2} & 0 \\ 0 & a & 1 + a^2 & -\frac{a^2}{1-a^2} & 0 & \frac{1}{1-a^2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 - a Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & a^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a^2}{1+a} & -\frac{a}{1-a^2} & \frac{1}{1-a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+a+a^2}{1+a} & 0 & -\frac{a}{1-a^2} & \frac{1}{1-a^2} \end{array} \right)$$

Siehe nächstes Blatt!

$$
\xrightarrow{\alpha Z_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & a^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a^2}{1+a} & -\frac{a}{1-a^2} & \frac{1}{1-a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{\alpha a}{1-a^2} & \frac{\alpha}{1-a^2} \end{array}\right) \qquad (\star)
$$

$$
\xrightarrow[Z_1-a^2Z_3]{Z_2-\frac{a^2}{1+a}Z_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1 & \frac{\alpha a^3}{1-a^2} & -\frac{\alpha a^2}{1-a^2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{a}{1-a^2} & \frac{1+a+\alpha a^3}{(1-a^2)(1+a)} & -\frac{\alpha a^2}{(1-a^2)(1+a)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{\alpha a}{1-a^2} & \frac{\alpha}{1-a^2} \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{Z_1-aZ_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1+a}{(1-a^2)(1+a)} & -\frac{a+a^2-\alpha a^3}{(1-a^2)(1+a)} & -\frac{\alpha a^2}{(1-a^2)(1+a)} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{a+a^2}{(1-a^2)(1+a)} & \frac{1+a+\alpha a^3}{(1-a^2)(1+a)} & -\frac{\alpha a^2}{(1-a^2)(1+a)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{\alpha a+\alpha a^2}{(1-a^2)(1+a)} & \frac{\alpha+\alpha a}{(1-a^2)(1+a)} \end{array}\right)
$$

und folglich ist in diesem Fall die Lösungsmenge gegeben durch $\mathcal{L} = \{A^{-1}b\}$, wobei

$$
\begin{aligned}
A^{-1}b =& \frac{1}{(1-a^2)(1+a)}\begin{pmatrix} 1+a & \alpha a^3 - a - a^2 & -\alpha a^2 \\ -a-a^2 & 1+a+\alpha a^3 & -\alpha a^2 \\ 0 & -\alpha a - \alpha a^2 & \alpha + \alpha a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
=& \frac{2}{(1-a^2)(1+a)}\begin{pmatrix} \frac{(1-a^2)(1+a)}{1+a+a^2} \\ \frac{(1-a^2)(1+a)}{1+a+a^2} \\ \frac{(1-a^2)(1+a)}{1+a+a^2} \end{pmatrix} = \frac{2}{1+a+a^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Die Rechnung wurde bis am Schluss durchgeführt, weil sich so im allgemeinen Fall die Lösung bestimmen lässt. In diesem Fall wäre es besser, wenn man in $(\star)$ erkennt, dass A vollen Rang besitzt und somit invertierbar ist, um dann das Gleichungssystem nochmls anzuschauen und zu erkennen, dass $\frac{2}{1+a+a^2}(1,1,1)^T$ eine Lösung und somit die eindeutige Lösung ist.

b) Wenn man den Spezialfall $a = -1$ in Teilaufgabe (a) betrachtet, sieht man, dass für $u = v = -w = 2$ die erweiterte Matrix $(A \mid b)$ Rang 3 besitzt, also ist $2 = \operatorname{Rang}(A) \neq \operatorname{Rang}(A \mid b) = 3$ und somit hat das Gleichungssystem $Ax = b$ keine Lösung.

10. Sei V ein Vektorraum und sei $T : \{0\} \to V$ linear. Dann gilt $T(0) = 0$ und somit existiert genau eine lineare Abbildung $T : \{0\} \to V$. Sei hingegen $S : V \to \{0\}$ eine lineare Abbildung, dann gilt $S(v) = 0$ für alle $v \in V$ und somit existiert genau eine Abbildung $S : V \to \{0\}$. Im Folgenden werden wir diese Abbildungen nicht weiter spezifizieren.

a) Wir haben in Serie 6 gezeigt, dass ein Unterraum $W \subseteq V$ existiert, sodass die Restriktion der kanonischen Projektion $p : V \to V/U$ auf W ein Isomorphismus $W \cong V/U$ ist und $V = U \oplus W$ gilt. Gegeben $v \in V$ sei $v = v_U + v_W$ die eindeutige Zerlegung von v mit Summanden $v_U \in U$ und $v_W \in W$. Definiere

Bitte wenden!

$\vartheta : V \to U \oplus V/U$ durch $\vartheta(v) = \big(v_U, p(v)\big)$. Wir wissen bereits aus der Diskussion direkter Summen, dass die Abbildungen $v \mapsto v_U$ und $v \mapsto v_W$ linear sind. Insbesondere ist also ϑ linear. Wir zeigen, dass ϑ bijektiv ist. Sei $v \in \operatorname{Ker}(\vartheta)$, dann ist $v_U = 0$ und $p(v) = 0$, insbesondere also $v \in \operatorname{Ker}(p) = U$ und somit $v = v_U$. Es folgt $v = 0$. Wegen der Formel für die Dimension von Quotientenräumen wissen wir

$$\dim(U \oplus V/U) = \dim(U) + \dim(V/U) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U) = \dim(V)$$

und somit ist ϑ ein Isomorphismus, da injektiv.

b) Falls die Sequenz exakt ist, dann gilt wegen Exaktheit von

$$\{0\} \longrightarrow U \xrightarrow{\varphi} V\ ,$$

dass $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0\}$ ist. Wegen Exaktheit von

$$V \xrightarrow{\psi} W \longrightarrow \{0\}$$

und der eingangs erwähnten Tatsache, dass die einzige lineare Abbildung $W \to \{0\}$ die Nullabbildung ist, folgt $\operatorname{Im}(\psi) = \operatorname{Ker}(0 : W \to \{0\}) = W$ und somit die Sujektivität von ψ. Die Exaktheit von

$$U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$$

gilt per definitonem.

Sei nun also

$$U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$$

exakt und seien φ injektiv und ψ surjektiv. Dann gilt $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0\}$ und somit ist nach der eingangs gemachten Bemerkung

$$\{0\} \longrightarrow U \xrightarrow{\varphi} V$$

exakt. Da $\operatorname{Ker}(0 : W \to \{0\}) = W = \operatorname{Im}(\psi)$ wegen der Surjektivität von ψ gilt, ist auch

$$V \xrightarrow{\psi} W \longrightarrow \{0\}$$

exakt. Zusammen mit der Exaktheit von

$$U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$$

folgt die Exaktheit von

$$\{0\} \longrightarrow U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W \longrightarrow \{0\}.$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Sei $i : U \to V$ die natürliche Inklusion und sei $p : V \to V/U$ die kanonische Projektion. Wir wissen aus Serie 6, dass $\mathrm{Ker}(p) = U = \mathrm{Im}(i)$ gilt. Somit ist die Sequenz

$$U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} V/U$$

exakt. Die Inklusion i ist injektiv, somit ist $\mathrm{Ker}(i) = \{0\}$ und infolgedessen die Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow U \xrightarrow{i} V$$

exakt. Schliesslich ist p surjektiv nach Konstruktion, und folglich ist $\mathrm{Im}(p) = V/W$, und insbesondere also die Sequenz

$$V \xrightarrow{p} V/U \longrightarrow \{0\}$$

exakt. Alle drei zusammen liefern die Exaktheit von

$$\{0\} \longrightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} V/U \longrightarrow \{0\} .$$

Sei $i_V : V \to V \oplus W$ die Inklusion $i_V(v) = (v, 0)$ und sei $\pi_W : V \oplus W \to W$ die Koordinatenprojektion $\pi_W(v, w) = w$. Wir behaupten, dass

$$\{0\} \longrightarrow V \xrightarrow{i_V} V \oplus W \xrightarrow{\pi_W} W \longrightarrow \{0\}$$

eine exakte Sequenz ist. Wir überprüfen zuerst, dass

$$V \xrightarrow{i_V} V \oplus W \xrightarrow{\pi_W} W$$

exakt ist. Sei $(v, w) \in \mathrm{Ker}(\pi_W)$, dann ist $0 = \pi_W(v, w) = w$. Somit ist

$$\mathrm{Ker}(\pi_W) \subseteq \{(v, 0) \mid v \in V\} = \mathrm{Im}(i_V).$$

Andererseits ist $\pi_W(v, 0) = 0$ für alle $v \in V$ und somit $\mathrm{Im}(i_V) \subseteq \mathrm{Ker}(\pi_W)$.

Es bleibt zu zeigen, dass i_V injektiv und π_W surjektiv ist. Seien $v, v' \in V$ und $i_V(v) = i_V(v')$. Nach Definition des direkten Produkts $V \times W$ ist das genau dann der Fall, wenn die Koordinaten von $i_V(v)$ und $i_V(v')$ identisch sind. Per definitionem ist aber $i_V(v) = (v, 0)$ und $i_V(v') = (v', 0)$ und somit $v = v'$. Also ist i_V injektiv. Für die Surjektivität von π_W verwenden sei $w \in W$ beliebig. Dann ist $(0, w) \in V \oplus W$ und es gilt $w = \pi_W(0, w)$. Somit folgt die Surjektivität von π_W.

d) Gegeben sei eine kurze exakte Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W \longrightarrow \{0\}$$

Bitte wenden!

endlichdimensionaler Vektorräume.

Wähle einen beliebigen direkten Summanden $\tilde{W} \subseteq V$ von $\mathrm{Im}(\varphi)$, d.h. $V = \mathrm{Im}(\varphi) \oplus \tilde{W}$. Wir erinnern daran, dass für jedes $v \in V$ eindeutig bestimmte $v_\varphi \in \mathrm{Im}(\varphi)$ und $v_c \in \tilde{W}$ existieren, sodass $v = v_\varphi + v_c$ gilt. Da φ injektiv ist, existiert genau ein $u \in U$, sodass $v_\varphi = \varphi(u)$, und somit existieren also eindeutige $u_v \in U$ und v_c, sodass $v = \varphi(u_v) + v_c$. Definiere $\vartheta : V \to U \oplus W$ durch $\vartheta(v) = (u_v, \psi(v_c)) = (u_v, \psi(v))$. Wir behaupten, dass diese Abbildung die gewünschten Eigenschaften besitzt.

ϑ **ist linear:** Seien $v, v' \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann wissen wir bereits aus der Diskussion direkter Summen, dass

$$(v + \lambda v')_\varphi = v_\varphi + \lambda v'_\varphi,$$

und es gilt $\varphi(u_v + \lambda u_{v'}) = \varphi(u_v) + \lambda\varphi(u_{v'}) = v_\varphi + \lambda v'_\varphi = (v + \lambda v')_\varphi$. Somit ist

$$u_{v+\lambda v'} = u_v + \lambda u_{v'}.$$

Insbesondere folgt also

$$\begin{aligned}\vartheta(v + \lambda v') &= \big(u_v + \lambda u_{v'}, \psi(v + \lambda v')\big) = \big(u_v + \lambda u_{v'}, \psi(v) + \lambda\psi(v')\big) \\ &= \big(u_v, \psi(v)\big) + \lambda\big(u_{v'}, \psi(v')\big) = \vartheta(v) + \lambda\vartheta(v').\end{aligned}$$

ϑ **ist injektiv:** Sei $\vartheta(v) = 0$. Dann ist $u_v = 0$ und $\psi(v) = 0$. Aus der Exaktheit folgt $v \in \mathrm{Im}(\varphi)$ und somit also $v = v_\varphi = \varphi(u_v) = 0$.

ϑ **ist surjektiv:** Sei $(u, w) \in U \oplus W$. Wir wissen aufgrund der Exaktheit der Sequenz, dass ein $v \in V$ existiert, sodass $\psi(v) = w$ ist. Sei $v = v_\varphi + v_c$. Definiere $v' = \varphi(u) + v_c$. Dann ist $v - v' = v_\varphi - \varphi(u) \in \mathrm{Im}(\varphi)$ und somit $\psi(v) = \psi(v')$. Andererseis ist nach Konstruktion $u_{v'} = u$ und somit $\vartheta(v') = (u, w)$. Insbesondere ist ϑ also surjektiv.

Bemerkung: Man kann unter Verwendung des Auswahlaxioms auch ohne Annahme endlicher Dimension zeigen, dass jeder Unterraum einen direkten Summanden besitzt. Der Beweis konstruiert also auch im falle unendlicher Dimension einen Isomorphismus $V \cong U \oplus W$. Alternativ kann man für endlichdimensionale Vektorräume auch die Dimensionsformel sowie Injektivität von φ und Surjektivität vonψ verwenden. Auf diese Weise folgt

$$\begin{aligned}\dim(V) &= \mathrm{nullity}(\psi) + \mathrm{Rang}(\psi) = \mathrm{Rang}(\varphi) + \mathrm{Rang}(\psi) \\ &= \dim(U) + \dim(W) = \dim(U \oplus W)\end{aligned}$$

und die Isomorphie folgt aus der Injektivität.

Es bleibt zu zeigen, dass **das Diagramm kommutiert**. Sei $u \in U$. Es folgt aus der Definition und aus $\psi \circ \varphi = 0$

$$(\vartheta \circ \varphi)(u) = \big(u_{\varphi(u)}, (\psi \circ \varphi)(u)\big) = (u, 0) = i_U(u) = (i_U \circ \mathrm{id}_U)(u),$$

Siehe nächstes Blatt!

und somit kommutiert

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{id}_U"'] & V \arrow[d, "\vartheta"] \\ U \arrow[r, "i_U"'] & U \oplus W \end{tikzcd}$$

Für das verbliebene Quadrat sei $v \in V$, dann ist

$$(\pi_W \circ \vartheta)(v) = \pi_W\big(u_v, \psi(v)\big) = \psi(v) = (\mathrm{id}_W \circ \psi)(v)$$

und somit kommutiert auch

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\vartheta"'] & W \arrow[d, "\mathrm{id}_W"] \\ U \oplus W \arrow[r, "\pi_W"'] & W \end{tikzcd}$$

und der Beweis ist vollständig.

11. "$\Rightarrow$": Wir zeigen die Kontraposition: Sei T nicht surjektiv, dann ist $\mathrm{Im}(T)$ ein echter Unterraum von W und somit $(W/\mathrm{Im}(T))^*$ ein Vektorraum positiver Dimension. Andererseits wissen wir aus Serie 6, dass $(W/\mathrm{Im}(T))^* \cong \mathrm{Im}(T)^\perp$ und somit finden wir ein nicht-triviales $f \in W^*$, sodass $f|_{\mathrm{Im}(T)} = 0$. Sei $v \in V$, dann gilt $(T^*f)(v) = f(Tv) = 0$ und da $v \in V$ beliebig war, folgt somit $T^*f = 0$. Nach Voraussetzung war $f \neq 0$ und somit ist T^* nicht injektiv.

"$\Leftarrow$": Angenommen T ist surjektiv. Sei $f \in \mathrm{Ker}(T)$. Wir wollen zeigen, dass $f(w) = 0$ für alle $w \in W$ gilt. Sei also $w \in W$ beliebig. Da T surjektiv ist, existiert ein $v \in V$, sodass $Tv = w$ ist. Nach Voraussetzung gilt

$$f(w) = f(Tv) = (T^*f)(v) = 0$$

und da w beliebig war, folgt $f = 0$. Somit ist T^* injektiv.

12. a) Im Folgenden sei $\lambda_k := e^{2\pi i \frac{k}{N}}$. Definieren Sie die Matrix $\mathcal{F} \in M_{N\times N}(\mathbb{C})$ durch

$$\mathcal{F}_{kj} = \frac{1}{\sqrt{N}}\lambda_k^{j-1} = \frac{1}{\sqrt{N}}e^{2\pi i \frac{(j-1)k}{N}} \qquad (1 \leq k, j \leq N)$$

Sei $(z_1, \dots, z_N)^T \in \mathbb{C}^N$, dann ist $\mathcal{F}z \in M_{N\times 1}(\mathbb{C})$ und

$$(\mathcal{F}z)_{k1} = \sum_{j=1}^{N} \mathcal{F}_{kj} z_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \lambda_k^{j-1} z_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_k^j z_{j+1} = \mathrm{DFT}(z)_k$$

Insbesondere ist $\mathrm{DFT} = L_{\mathcal{F}}$, somit linear und $[\mathrm{DFT}]_{\mathcal{E}_N}^{\mathcal{E}_N} = \mathcal{F}$.

Bitte wenden!

b) Zur Lösung dieser Teilaufgabe haben Sie mehrere Möglichkeiten. Beispielsweise wissen Sie aus der Analysis (Serie 11, Aufgabe 2), dass die Menge $\{\lambda_k \mid 1 \leq k \leq N\}$ genau die Menge der Nullstellen des Polynoms $X^N - 1$ ist, und dass letzteres genau N verschiedene Nullstellen besitzt. Insbesondere ist also

$$0 \neq \prod_{1 \leq k < l \leq N} (\lambda_l - \lambda_k) = \det(\mathcal{F})$$

wobei wir hier Aufgabe 6 aus Serie 12 verwendet haben.

Wenn man die entsprechende Aufgabe nicht gelöst hat, geht man wie folgt vor: Sei $f_k := \sum_{j=1}^N \lambda_k^{j-1} \varepsilon_j$, wobei $\{\varepsilon_j \mid 1 \leq j \leq N\} \subseteq (\mathbb{C}^N)^*$ die Koordinatenfunktionen bezüglich der Standardbasis $\{e_1, \dots, e_N\}$ sind, d.h. $\varepsilon_j(e_i) = \delta_{ij}$. Wir zeigen, dass gilt $\cap_{k=1}^N \mathrm{Ker}(f_k) = \{0\}$ und folglich – wegen $\mathrm{DFT}(z)_k = f_k(z)$ – auch

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{DFT}) = \cap_{k=1}^N \mathrm{Ker}(f_k) = \{0\}$$

Hierfür zeigen wir, dass für alle $1 \leq k \leq N$ ein $z^{(k)} \in \mathbb{C}^N$ existiert, so dass

$$f_l(z^{(k)}) = 0 \Leftrightarrow k \neq l$$

Setze $(z^{(k)})_j = \lambda_k^{1-j}$, dann ist

$$f_l(z^{(k)}) = \sum_{j=1}^N \lambda_l^{j-1} \lambda_k^{1-j} = \sum_{j=1}^N e^{2\pi i \frac{(j-1)(k-l)}{N}} = \sum_{j=1}^N \left(e^{2\pi i \frac{k-l}{N}}\right)^{j-1}$$

Falls $k = l$, dann ist also $f_l(z^{(k)}) = N \neq 0$. Sei $k \neq l$, dann ist $e^{2\pi i \frac{k-l}{N}} \neq 1$ und also

$$f_l(z^{(k)}) = \sum_{j=0}^{N-1} \left(e^{2\pi i \frac{k-l}{N}}\right)^j = \frac{\left(e^{2\pi i \frac{k-l}{N}}\right)^N - 1}{e^{2\pi i \frac{k-l}{N}} - 1} = \frac{e^{2\pi i (k-l)} - 1}{e^{2\pi i \frac{k-l}{N}} - 1} = 0$$

Eine dritte Möglichkeit wäre, direkt die Inverse von DFT anzugeben und somit Teilaufgabe (b) und (c) auf einmal zu lösen.

c) Am einfachsten ist es, die Inverse (wie im wesentlichen oben getan) zu erraten. Wir behaupten, dass $L_{\overline{\mathcal{F}}^T} \circ L_{\mathcal{F}} = I_{\mathbb{C}^N}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
(\overline{\mathcal{F}}^T \mathcal{F})_{kj} &= \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \overline{\mathcal{F}}^T_{kr} \mathcal{F}_{rj} = \sum_{r=1}^N \overline{\mathcal{F}}_{rk} \mathcal{F}_{rj} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \overline{\lambda_r}^{k-1} \lambda_r^{j-1} = \sum_{r=1}^N e^{2\pi i \frac{(j-k)r}{N}}
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$=\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\left(e^{2\pi i\frac{r}{N}}\right)^{j-k}=\begin{cases}1 & \text{falls } j=k\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Also ist $\overline{\mathcal{F}}^T\mathcal{F}=I_N$ und folglich

$$L_{\overline{\mathcal{F}}^T}\circ \mathrm{DFT}=L_{\overline{\mathcal{F}}^T}\circ L_{\mathcal{F}}=L_{\overline{\mathcal{F}}^T\mathcal{F}}=L_{I_N}=I_{\mathbb{C}^N},$$

also $\mathrm{DFT}^{-1}=L_{\overline{\mathcal{F}}^T}$.

d) Man berechnet für $1\leq k\leq N$:

$$\begin{aligned}\mathrm{DFT}(z*y)_k =&\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1}e^{2\pi i\frac{jk}{N}}(z*y)_{j+1}=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}e^{2\pi i\frac{jk}{N}}\sum_{l=0}^{N-1}z_{l+1}y_{j+1-l}\\ =&\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}z_{l+1}\underbrace{e^{2\pi i\frac{lk}{N}}e^{-2\pi i\frac{lk}{N}}}_{=1}\sum_{j=0}^{N-1}e^{2\pi i\frac{jk}{N}}y_{j+1-l}\\ =&\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}z_{l+1}e^{2\pi i\frac{lk}{N}}\sum_{j=0}^{N-1}e^{2\pi i\frac{(j-l)k}{N}}y_{j+1-l}\\ =&\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}z_{l+1}e^{2\pi i\frac{lk}{N}}\sum_{j=0}^{N-1}e^{2\pi i\frac{jk}{N}}y_{j+1}=\mathrm{DFT}(z)\cdot\mathrm{DFT}(y)\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Periodizität von $e^{2\pi i\frac{jk}{N}}y_{j+1}$ verwendet haben, insbesondere die Folgerung, dass

$$\forall l\in\mathbb{Z}:\ \sum_{j=0}^{N-1}e^{2\pi i\frac{(j+l)k}{N}}y_{j+1+l}=\sum_{j=0}^{N-1}e^{2\pi i\frac{jk}{N}}y_{j+1}$$

13. a) Wir berechnen $({A_{\mathcal{G}}}^r)_{ij}$. Wir wissen, dass

$$({A_{\mathcal{G}}}^2)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(A_{\mathcal{G}})_{ik}(A_{\mathcal{G}})_{kj}$$

Angenommen $r\geq 2$ und

$$({A_{\mathcal{G}}}^r)_{ij}=\sum_{k_1,\dots,k_{r-1}=1}^{n}(A_{\mathcal{G}})_{ik_1}(A_{\mathcal{G}})_{k_{r-1}j}\prod_{l=1}^{r-2}(A_{\mathcal{G}})_{k_lk_{l+1}}$$

Dann ist

$$({A_{\mathcal{G}}}^{r+1})_{ij}=\sum_{k=1}^{n}({A_{\mathcal{G}}}^r)_{ik}(A_{\mathcal{G}})_{kj}$$

Bitte wenden!

$$= \sum_{k,k_1,\ldots,k_{r-1}}^{n} (A_{\mathcal{G}})_{ik_1} (A_{\mathcal{G}})_{k_{r-1}k} (A_{\mathcal{G}})_{kj} \prod_{l=1}^{r-2} (A_{\mathcal{G}})_{k_l k_{l+1}}$$

$$= \sum_{k_1,\ldots,k_r}^{n} (A_{\mathcal{G}})_{ik_1} (A_{\mathcal{G}})_{k_r j} \prod_{l=1}^{r-1} (A_{\mathcal{G}})_{k_l k_{l+1}}$$

Nun ist

$$(A_{\mathcal{G}})_{ik_1} (A_{\mathcal{G}})_{k_{r-1}j} \prod_{l=1}^{r-2} (A_{\mathcal{G}})_{k_l k_{l+1}}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{falls } (A_{\mathcal{G}})_{ik_1} = (A_{\mathcal{G}})_{k_l k_{l+1}} = (A_{\mathcal{G}})_{k_{r-1}j} = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also ist $(A_{\mathcal{G}})_{ik_1} (A_{\mathcal{G}})_{k_{r-1}j} \prod_{l=1}^{r-1} (A_{\mathcal{G}})_{k_l k_{l+1}} = 1$ genau dann, wenn $(i, k_1, \ldots, k_{r-1}, j)$ ein Weg in $\mathcal{G}$ der Länge r von i nach j ist und 0 sonst.

Somit ist $({A_{\mathcal{G}}}^r)_{ij} = m$ genau dann, wenn es genau m Wege der Länge r in $\mathcal{G}$ von i nach j gibt und die allgemeinere Äquivalenz folgt sofort.

b) Wir sagen $i \in V$ ist *dominant*, falls $(A_{\mathcal{G}} + {A_{\mathcal{G}}}^2)_{ij} > 0$ für alle von i verschiedenen $j \in i$. Sei $i \in V$ beliebig und sei $j \in V$ mit $(A_{\mathcal{G}} + {A_{\mathcal{G}}}^2)_{ij} = 0$. Wir behaupten, dass jedes durch i dominierte Element durch j dominiert ist. Angenommen i dominiert k und j dominiert k *nicht*, dann ist $A_{ik} = 1$ und $A_{jk} = 0$, also $A_{kj} = 1$ und folglich

$$(A_{\mathcal{G}} + {A_{\mathcal{G}}}^2)_{ij} = A_{ij} + \sum_{l=1}^{n} A_{il} A_{lj} \geq A_{ik} A_{kj} = 1$$

im Widerspruch zur Annahme.

Im Folgenden sei $d(i) := \{j \in V \mid i \text{ dominiert } j\}$. Sei $i_0 \in V$ beliebig. Falls $(A_{\mathcal{G}} + {A_{\mathcal{G}}}^2)_{i_0 j} > 0$ für alle von i_0 verschiedenen $j \in V$, dann sind wir fertig. Andernfalls existiert ein $i_1 \in V$ mit $(A_{\mathcal{G}} + {A_{\mathcal{G}}}^2)_{i_0 i_1} = 0$.

Seien nun $i_0, \ldots, i_r \in V$ mit $(A_{\mathcal{G}} + {A_{\mathcal{G}}}^2)_{i_l i_{l+1}} = 0$ für $0 \leq l \leq r$. Wegen $(A_{\mathcal{G}} + {A_{\mathcal{G}}}^2)_{i_l i_{l+1}} = 0$ ist insbesondere $A_{i_{l+1} i_l} = 1$ und somit ist $d(i_l) < d(i_{l+1})$. Also ist $r \leq d(i_r)$. Falls i_r dominant ist, sind wir fertig. Andernfalls existiert $i_{r+1} \in V$ mit $(A_{\mathcal{G}} + {A_{\mathcal{G}}}^2)_{i_r i_{r+1}} = 0$ und es gilt $r + 1 \leq d(i_{r+1})$. Da $d(i) \leq |V| - 1$, ist dies nur endlich viele Male möglich, d.h. die Konstruktion bricht irgendwann ab. Es existiert also ein r^* so dass $(A_{\mathcal{G}} + {A_{\mathcal{G}}}^2)_{i_{r^*} j} > 0$ für alle von i_{r^*} verschiedenene $j \in V$.

c) **"$\Rightarrow$":** Sei i in einer Clique $C \subseteq V$, dann existieren von i verschiedene $j, k \in C$ und per Definition gelten $(i, j) \in E$, $(j, k) \in E$ und $(k, i) \in E$ sowie $(j, i) \in$

Siehe nächstes Blatt!

E, $(k,j) \in E$ und $(i,k) \in E$, also

$$0 < 1 = (C_{\mathcal{G}})_{ij}(C_{\mathcal{G}})_{jk}(C_{\mathcal{G}})_{ki} \leq \sum_{k_1,k_2=1}^{n} (C_{\mathcal{G}})_{ik_1}(C_{\mathcal{G}})_{k_1k_2}(C_{\mathcal{G}})_{k_2i} = ({C_{\mathcal{G}}}^3)_{ii}$$

"$\Leftarrow$": Sei $({C_{\mathcal{G}}}^3)_{ii} > 0$, dann existieren (wegen $(C_{\mathcal{G}})_{ii} = 0$) von i verschiedene $j \neq k \in V$ mit $(C_{\mathcal{G}})_{ij}(C_{\mathcal{G}})_{jk}(C_{\mathcal{G}})_{kl} = 1$. Sei $C^* := \{i,j,k\}$. Per Definition gilt

$$(i,j),(j,i),(i,k),(k,i),(j,k),(k,j) \in E$$

Eine Teilmenge $D \subseteq V$ sei *vollständig*, falls für paarweise verschiedene $i_1, i_2 \in D$ gelten $(i_1,i_2) \in E$ und $(i_2,i_1) \in E$. Insbesondere ist C^* vollständig.

Wir zeigen, dass jede vollständige Teilmenge $D \subseteq V$ mit mindestens drei Elementen in einer Clique enthalten ist, woraus die Behauptung folgt. Hierfür reicht es zu zeigen, dass jede vollständige Teilmenge $D \subseteq V$ in einer bezüglich Inklusion maximalen vollständigen Teilmenge enthalten ist. Sei D vollständig. Definiere $D_0 := D$. Angenommen $r \geq 0$ und gegeben eine aufsteigende Folge $D_0 \subseteq \cdots \subseteq D_r \subseteq V$ so dass für alle $0 \leq l \leq r$ die Menge D_l vollständig ist und $|D_{l+1} \setminus D_l| = 1$ wann immer $l < r$. Falls $D_r = V$, dann ist D_r vollständig und maximal und wir sind fertig. Andernfalls ist $V \setminus D_r$ nicht leer. Falls für alle $k \in V \setminus D_r$ ein $i \in D_r$ existiert mit $(i,k) \notin E$ oder $(k,i) \notin E$, dann ist jede echte Obermenge von D_r nicht vollständig und somit ist D_r eine maximale vollständige Teilmenge von V. Andernfalls finden wir $k \in V \setminus D_r$, so dass $D_{r+1} = D_r \cup \{k\}$ vollständig ist. Da V endlich ist, existiert ein $r^* \geq 0$, so dass entweder $D_{r^*} = V$ oder jede echte Obermenge von D_{r^*} ist nicht vollständig. Da D_{r^*} per Konstruktion vollständig ist und $D_0 \in D_{r^*}$, ist D_{r^*} eine maximale vollständige Teilmenge von V, die D_0 enthält.