Serie 15:
Ferienserie

1. **a)** Zeigen Sie, dass die Abbildung $T : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^5$, gegeben durch

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3$$

linear ist.

b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von f.

c) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von f.

d) Seien $\mathcal{B} = (e_1+e_2, e_2+e_3, e_3+e_1)$ und $\mathcal{C} = (e_1+e_2, e_1-e_2, e_3, e_4+e_5, e_4-e_5)$. Bestimmen Sie $[T^*]^{\mathcal{B}^*}_{\mathcal{C}^*}$.

2. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $\dim(V) = n$, seien $U, W \subseteq V$ zwei Unterräume

a) Angenommen $\frac{n}{2} < \min\{\dim(U), \dim(W)\}$. Zeigen Sie, dass $U \cap W \neq \{0\}$.

b) Zeigen Sie, dass

$$(U + W)/W \cong U/(U \cap W)$$

c) Sei E ein Unterraum von V/W. Zeigen Sie, dass ein Unterraum F von V existiert, so dass $W \subseteq F$ und

$$E = \{v + W \mid v \in F\}$$

Bitte wenden!

d) Sei $W \subseteq U$. Zeigen Sie, dass

$$(V/W)/(U/W) \cong V/U$$

3. Wir definieren die $2n \times 2n$ Matrix J_0 durch

$$J_0 := \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & -I_n \\ I_n & 0_{n\times n} \end{pmatrix} \overset{\text{kurz}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

beachte, dass $J_0^2 = -I_{2n}$

Definition: Sei $\Psi \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ so nennen wir Ψ eine symplektische Matrix wenn $\Psi^T J_0 \Psi = J_0$ und wir schreiben $\mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$ für die Menge aller symplektischen Matrizen.

a) Seien $\Phi, \Psi \in \mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$. Zeigen Sie, dass $\Phi\Psi$, Ψ^{-1} und Ψ^T symplektisch sind.

b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$ mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung und der Einheitsmatrix als Identität eine Gruppe ist

c) Seien $A, B, C, D \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und sei $\Phi = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $\Phi \in \mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$ genau dann, wenn $\Phi \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ und

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix}$$

Folgern Sie daraus, dass eine 2×2 Matrix genau dann symplektisch ist, wenn ihre Determinante gleich 1 ist.

d) Zeigen Sie, dass für $\Phi \in \mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$ gilt $\det(\Phi)^2 = 1$. (Tatsächlich ist $\det(\Phi) = 1$ für alle $\Phi \in \mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$, aber das ist einiges komplizierter zu zeigen.)

4. **a)** Berechnen Sie eine LR-Zerlegung der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{C})$$

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Mx = 0$ über $\mathbb{C}$.

5. Im Folgenden sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$.

Siehe nächstes Blatt!

a) Sei $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ linear unabhängig und sei $w \in V$ beliebig. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\{v_1 + w, \dots, v_n + w\}$ genau dann linear abhängig ist, wenn $w \in \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$.

b) Sei $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq V$ linear unabhängig. Zeigen Sie, dass $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_1 + v_3\}$ genau dann linear unabhängig ist, wenn $2 \neq 0$ in $\mathbb{K}$.

6. Die Zahlen 2014, 1484, 3710 sowie 6996 sind alle durch 106 teilbar. Folgern Sie ohne rechnen, dass $\det(A)$ durch 106 teilbar ist, wobei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

7. Im Folgenden sei

$$V(x_1, \dots, x_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$$

für $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, d.h. $V(x_1, \dots, x_n)$ ist die Determinante der Matrix $W(x_1, \dots, x_n)$ mit

$$W(x_1, \dots, x_n)_{ij} = x_i^{j-1} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

a) Bestimmen Sie $V(x_1)$ und $V(x_1, x_2)$.

b) Zeigen Sie, dass

$$V(x_1, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

c) Zeigen Sie für $n \geq 2$

$$V(x_1, \dots, x_n) = V(x_2, \dots, x_n) \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1)$$

Hinweis: Verwenden Sie für $x, y \in \mathbb{K}$ und $n \geq 1$ die Formel

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x - y) \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}$$

Wenn Sie die Formel beweisen wollen, unterscheiden Sie die Fälle $y = 0$, $y = x$ und $y \neq 0$ und berechnen Sie für $y \notin \{0, x\}$ die Summe $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x}{y}\right)^k$.

Bitte wenden!

d) Zeigen Sie

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

e) Sei $p \in P(\mathbb{C})$ ein Polynom, so dass $p(r) \in \mathbb{Q}$ wann immer $r \in \mathbb{Q}$. Folgern Sie, dass $p \in P(\mathbb{Q})$.

8. Gegeben seien die folgenden geordneten Basen $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ und $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ von $\mathbb{Q}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Überprüfen Sie, dass es sich hierbei tatsächlich um Basen handelt und bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $[I_{\mathbb{Q}^4}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

9. a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 + a^2x_3 &= u \\ ax_1 + \ \ x_2 + a^2x_3 &= v \\ a^2x_1 + ax_2 + \ \ \ x_3 &= w \end{aligned}$$

mit $u = v = w = 2$ genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen? Geben Sie jeweils die Lösungsmenge an.

b) Geben Sie u, v, w an, so dass das Gleichungssystem für $a = -1$ keine Lösung hat.

10. a) Sei V endlichdimensional und sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Konstruieren Sie einen Isomorphismus $V \cong U \oplus V/U$.

Seien U, V, W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$, seien $\varphi \in \mathrm{Hom}(U, V)$ und $\psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Die Sequenz

$$U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$$

Siehe nächstes Blatt!

heisst *kurz exakt*, falls $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$. Eine Folge von Vektorräumen $\{U_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ mit Homomorphismen $\varphi_i \in \mathrm{Hom}(U_i, U_{i+1})$ heisst exakt, wenn jede Teilsequenz

$$U_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} U_i \xrightarrow{\varphi_i} U_{i+1}$$

exakt ist. Eine exakte Sequenz der Form

$$\{0\} \longrightarrow U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W \longrightarrow \{0\} \tag{A}$$

heisst *kurz exakt*.

b) Seien U, V, W Vektorräume. Zeigen Sie, dass die Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W \longrightarrow \{0\}$$

genau dann exakt ist, wenn

$$U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$$

exakt, φ injektiv und ψ surjektiv ist.

c) Seien V, W Vektorräume und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Finden Sie Homomorphismen, so dass die folgenden Sequenzen kurz exakt sind.

$$\{0\} \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow V/U \longrightarrow \{0\}$$

$$\{0\} \longrightarrow V \longrightarrow V \oplus W \longrightarrow W \longrightarrow \{0\}$$

d) Eine kurze exakte Sequenz wie in (A) zerfällt, wenn ein Isomorphismus $\vartheta : V \to U \oplus W$ existiert, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\vartheta"] & W \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & U \arrow[r, "i_U"'] & U \oplus W \arrow[r, "\pi_W"'] & W \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

wobei $i_U : U \to U \oplus W$ die Inklusion $u \mapsto (u, 0)$ und $\pi_W : U \oplus W \to W$ die Projektion $(u, w) \mapsto w$ ist. Zeigen Sie, dass jede kurze exakte Sequenz endlichdimensionaler Vektorräume zerfällt.

11. Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$ und sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ mit dualer Abbildung $T^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$. Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$T^* \text{ ist injektiv} \iff T \text{ ist surjektiv.}$$

Bitte wenden!

12. Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{DFT} : \mathbb{C}^N &\to \mathbb{C}^N \\ \mathrm{DFT}(z)_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{jk}{N}} z_{j+1} \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass DFT linear ist und bestimmen Sie $[\mathrm{DFT}]_{\mathcal{E}_N}^{\mathcal{E}_N}$.

b) Zeigen Sie, dass DFT invertierbar ist.

c) Bestimmen Sie die Inverse DFT^{-1}.

d) Erweitern Sie einen Vektor $z \in \mathbb{C}$ zu einer peridoischen Folge in $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, indem Sie die Abbildung $\{1, \ldots, N\} \to \mathbb{C}$, $k \mapsto z_k$ periodisch (mit Periode N) auf $\mathbb{Z}$ erweitern, und definieren Sie für zwei N-periodische Folgen $z, y \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ ihre *Faltung* $z * y \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ als die N-periodische Folge definiert durch

$$(z * y)_k := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} z_{j+1} y_{k-j} \qquad 1 \leq k \leq N$$

Erweitern Sie $\mathrm{DFT} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ zu einem linearen Endomorphismus auf dem Vektorraum der N-periodischen Folgen. Zeigen Sie, dass

$$z * y = \mathrm{DFT}^{-1}\big(\mathrm{DFT}(z) \cdot \mathrm{DFT}(y)\big)$$

wobei wir für zwei Folgen $z, y \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ mit $z \cdot y$ das komponentenweise Produkt bezeichnen, d.h. $(z \cdot y)_k = z_k y_k$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung: Beachten Sie, dass sich für zwei Polynome das Produkt der Polynome als Faltung der Koeffizientenvektoren realisieren lässt (sei d der maximale Grad, dann verstehe man die Polynome als Vektoren in $\mathbb{C}^{2d}$). In der Numerik werden Sie die *Fast Fourier Transform* kennenlernen, eine Methode, mit welcher sich die diskrete Fourier Transformation DFT besonders schnell berechnen lässt und womit sich also besonders schnell Produkte von Polynomen bestimmen lassen. Das Problem ist äquivalent zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilung von Summen gewisser Zufallsvariablen und die diskrete Fourier Transformation dementsprechend wichtig beispielsweise im Risikomanagement, aber auch in der Bildverarbeitung und überall sonst.

13. Ein endlicher Graph $\mathcal{G}$ ist ein Tupel (V, E), wobei V eine endliche Menge und $E \subseteq V^2$ eine Teilmenge ist. Intuitiv stelle man sich eine Menge von Punkten $i \in V$ und eine Menge von Kanten (direkten Wegen) $(i, j) \in V^2$ von i nach j vor. Der Graph

Siehe nächstes Blatt!

$\mathcal{G} = (V, E)$ heisst *einfach*, falls $(i, i) \notin E$ für alle $i \in V$. Im Folgenden sind alle Graphen einfach.

Gegeben sei ein endlicher Graph $\mathcal{G} = (V, E)$, so ist die *Adjazenzmatrix* $A_{\mathcal{G}} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ von $\mathcal{G}$ definiert durch

$$(A_{\mathcal{G}})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Seien $i, j \in V$. Ein *Weg* in $\mathcal{G}$ (der Länge r) von i nach j ist eine endliche Folge von Knoten $\{i_k \mid 0 \leq k \leq r\}$, so dass $i_0 = i$, $i_r = j$ und $(i_{k-1}, i_k) \in V$ für alle $1 \leq k \leq r$. Beweisen Sie für $i, j \in V$ und $r, m \in \mathbb{N}$

$$\text{Es gibt genau } m \text{ Wege der Länge höchstens } r \text{ von } i \text{ nach } j$$
$$\Leftrightarrow (A_{\mathcal{G}} + {A_{\mathcal{G}}}^2 + \cdots + {A_{\mathcal{G}}}^r)_{ij} = m$$

b) Gegeben ein Graph $\mathcal{G} = (V, E)$, dann definiert $\mathcal{G}$ eine *Dominanzrelation*, wenn für alle paarweise verschiedenen $i, j \in V$ gilt $(i, j) \in E \Leftrightarrow (j, i) \notin E$. Falls $(i, j) \in E$, dann sagen wir, i dominiert j. Zeigen Sie, dass $A_{\mathcal{G}} + {A_{\mathcal{G}}}^2$ eine Zeile oder Spalte besitzt, deren Einträge abseits der Diagonalen alle von 0 verschieden sind, d.h. es gibt ein $i \in V$, so dass i jedes von i verschiedene $j \in V$ in zwei Schritten dominiert.

Bemerkung: Wir stellen uns beispielsweise vor, dass die Knoten V endlich viele, verschiedene Allele repräsentieren, die sich paarweise immer in ein dominantes und ein rezessives Allel unterscheiden lassen. Dann existiert also ein Allel, das jedes andere Allel in ein oder zwei Schritten domimiert.

c) Sei $\mathcal{G} = (V, E)$ ein Graph. Eine *Clique* ist eine bezüglich Inklusion maximale Teilmenge $C \subseteq V$ mit mindestens drei Elementen, so dass für paarweise verschiedene $i, j \in C$ gilt $(i, j) \in E$ und $(j, i) \in E$. Wir definieren die Matrix $C_{\mathcal{G}} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ durch

$$(C_{\mathcal{G}})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (A_{\mathcal{G}})_{ij} = (A_{\mathcal{G}})_{ji} = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$i \text{ ist Element einer Clique} \Leftrightarrow ({C_{\mathcal{G}}}^3)_{ii} > 0$$

Bitte wenden!

14. Online Abgabe Serie 15:

1. Sei f ein Polynom vom Grad n und $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ so ist λf auch ein Polynom vom Grad n

(a) richtig

(b) falsch

2. Gegeben seien die Vektoren $u = (1, 0, 0), v = (1, 1, 0)$ und $w = (0, 1, 1)$ in $\mathbb{R}^3$. Dann ist $\{u, v, w, \}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

(a) richtig

(b) falsch

3. Sei V ein Vektorraum, sei $S \subset V$. Wenn S den Nullvektor enthält, dann ist S linear abhängig

(a) richtig

(b) falsch

4. Jede Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ mit mindestens drei Elementen ist linear abhängig.

(a) richtig

(b) falsch

5. Jede Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ mit höchstens zwei Elementen ist linear unabhängig.

(a) richtig

(b) falsch

Siehe nächstes Blatt!

6. Jeder endlich-dimensionale Vektorraum hat genau eine Basis.

(a) richtig

(b) falsch

7. $\dim M_{m\times n}(\mathbb{K}) = m + n$

(a) richtig

(b) falsch

8. Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume und $T : V \to W$ eine Abbildung. Sei $(u_1, \ldots, u_n)$ eine geordnete Basis von V. Wenn für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt

$$T(u_i + u_j) = T(u_i) + T(u_j),$$

dann ist T linear.

(a) richtig

(b) falsch

9. Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei $\dim(V) < \dim(W)$. Dann ist f surjektiv.

(a) richtig

(b) falsch

10. Seien A, B Matrizen über $\mathbb{K}$, so dass $AB = I_n$. Dann sind A und B invertierbar.

(a) richtig

(b) falsch

Bitte wenden!

11. Sei $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ invertierbar, dann ist auch $A + A^{-1}$ invertierbar.

(a) richtig

(b) falsch

12. Alle Einträge einer Elementarmatrix sind entweder 1 oder 0.

(a) richtig

(b) falsch

13. Die Transponierte einer Elementarmatrix ist eine Elementarmatrix

(a) richtig

(b) falsch

14. Für alle $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ gilt $\mathrm{Rang}(AB) = \mathrm{Rang}(BA)$.

(a) richtig

(b) falsch

15. Elementare Zeilenumformungen sind rangerhaltend

(a) richtig

(b) falsch

16. Eine $n \times n$-Matrix mit Rang n ist invertierbar

(a) richtig

(b) falsch

Siehe nächstes Blatt!

17. Jedes lineare Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat mindestens eine Lösung.

(a) richtig

(b) falsch

18. Jedes lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat keine Lösung.

(a) richtig

(b) falsch

19. Seien $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $u, v \in \mathbb{K}^m$ Vektoren. Angenommen die Lösungsmengen der linearen Gleichungssysteme $Ax = u$ und $Bx = v$ seien nicht-leer, dann ist auch die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $(A + B)y = u + v$ nicht-leer.

(a) richtig

(b) falsch

20. Sei $(A \mid b)$ in Zeilenstufenform, so hat das System $Ax = b$ eine Lösung.

(a) richtig

(b) falsch

21. Der Rang einer Dreiecksmatrix ist gleich der Anzahl der von 0 verschiedenen Diagonalelemente.

(a) richtig

(b) falsch

Bitte wenden!

22. Sind die beiden Zeilen einer 2×2-Matrix A identisch, so gilt $\det(A) = 0$

(a) richtig

(b) falsch

23. Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, dann ist $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(a) richtig

(b) falsch

24. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und sei $\det(A) = 0$, dann sind die Zeilen $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$ von A linear abhängig.

(a) richtig

(b) falsch

25. Seien $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ und sei A invertierbar, dann gilt $\det(A^{-1}B) = \frac{\det(B)}{\det(A)}$.

(a) richtig

(b) falsch

26. Seien $\lambda \in \mathbb{K}$ und $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, dann ist $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

(a) richtig

(b) falsch

27. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F}_2)$, dann gilt $\det(A + A) = \det(A) + \det(A)$.

(a) richtig

(b) falsch

Siehe nächstes Blatt!

28. Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{F}_2)$, dann gilt $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

(a) richtig

(b) falsch

29. Sei A in $M_{n\times n}(\mathbb{K})$, dann ist A genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$.

(a) richtig

(b) falsch

30. Sei $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{F}_2)$, dann ist $\mathrm{Rang}(A) = 2$ genau dann, wenn $\det(A) = 1$.

(a) richtig

(b) falsch

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Diese Serie wird nicht korrigiert.