Lösung Serie 16: Diagonalisierbarkeit

1. **a)** Es ist $\det(A - XI_2) = (1-X)(4-X) + 2 = X^2 - 5X + 6$, und das charakteristische Polynom hat somit die Nullstellen $\{\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{25-24})\} = \{2, 3\}$. Wir berechnen

$$\lambda = 2: \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\lambda = 3: \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Folglich sind $E_2 = \operatorname{span}\{(1,-1)^T\}$ und $E_3 = \operatorname{span}\{(1,-2)^T\}$.

b) Wir berechnen das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \det(B - XI_3) &= \det \begin{pmatrix} 2-X & 2 & 3 \\ 1 & 2-X & 1 \\ 2 & -2 & 1-X \end{pmatrix} \\ &= -\,(X^3 - 5X^2 + 2X + 8) \\ &= -\,(X-4)(X-2)(X+1). \end{aligned}$$

Somit hat B die Eigenwerte $\{-1, 2, 4\}$. Da diese alle in $\mathbb{Q}$ liegen, besitzt B eine Basis bestehend aus Eigenvektoren.

Wir lösen wieder das entsprechende Gleichungssystem für $B - \lambda I_3$:

"$\lambda = -1$":

$$(B + I_3) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_3-2Z_1]{Z_2-3Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{7}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_1-3Z_2]{Z_3+8Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und da elementare Zeilenoperation der Kern der Matrix unverändert lassen, finden wir

$$E_{-1} = \mathbb{Q} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

“$\lambda = 2$”: Es ist

$$B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3-2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3+Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und folglich

$$E_2 = \mathbb{Q} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

“$\lambda = 4$”: Es ist

$$B - 4I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3+Z_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2+2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_1+Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und folglich ist

$$E_4 = \mathbb{Q} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) Es ist

$$\mathrm{char}_D(X) = (1-X)\big((1-X)^2+1\big)$$

Siehe nächstes Blatt!

$$
\begin{aligned}
&=(1-X)(X^2-2X+2) \\
&=-(X-1)(X-1-\mathrm{i})(X-1+\mathrm{i}).
\end{aligned}
$$

Im Folgenden ist $\omega := 1+\mathrm{i}$. Wir berechnen wieder die Eigenräume.

"$\lambda = 1$": Wir berechnen

$$D - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und folglich ist

$$E_1 = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

"$\lambda = \omega$": Wir berechnen

$$D - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 & -1 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 1 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 - \mathrm{i}Z_1} \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 & -1 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\mathrm{i}Z_3]{\substack{\mathrm{i}Z_1 \\ \mathrm{i}Z_2}} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 - Z_2]{Z_1 - \mathrm{i}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und folglich ist

$$E_\omega = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

"$\lambda = \overline{\omega}$": Wir berechnen

$$D - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 & -1 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 1 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 + \mathrm{i}Z_1} \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 & -1 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[-\mathrm{i}Z_3]{\substack{-\mathrm{i}Z_1 \\ -\mathrm{i}Z_2}} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 - Z_2]{Z_1 + \mathrm{i}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und folglich ist

$$E_{\overline{\omega}} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

d) Wir berechnen das charakteristische Polynom als

$$\mathrm{char}_E(X) = (\cos\varphi - X)^2 + (\sin\varphi)^2 = X^2 - 2(\cos\varphi)X + 1$$

Bitte wenden!

und folglich sind die Eigenwerte gegeben durch $\{e^{\mathrm{i}\varphi}, e^{-\mathrm{i}\varphi}\}$. Wir berücksichtigen separat den Spezialfall $\sin\varphi = 0$. In diesem Falle ist $E = \pm I_2$ und folglich ist die Standardbasis eine Eigenbasis zu Eigenwerten 1 oder -1, abhängig vom Vorzeichen von E. Genauer:

- Falls $E = I_2$, dann ist $E_1 = \mathbb{C}^2$.
- Falls $E = -I_2$, dann ist $E_{-1} = \mathbb{C}^2$.

Sei also nun $\sin\varphi \neq 0$, dann ist $e^{\mathrm{i}\varphi} \neq e^{-\mathrm{i}\varphi}$ und wir erhalten eindimensionale Eigenräume, die wir im Folgenden berechnen.

"$\lambda = e^{\mathrm{i}\varphi}$": Wir erhalten

$$E - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sin\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & -\mathrm{i}\sin\varphi \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2 - \mathrm{i}Z_1} \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sin\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und folglich ist

$$E_{e^{\mathrm{i}\varphi}} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

"$\lambda = e^{-\mathrm{i}\varphi}$": Wir erhalten

$$E - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sin\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \mathrm{i}\sin\varphi \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2 + \mathrm{i}Z_1} \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sin\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und folglich ist

$$E_{e^{-\mathrm{i}\varphi}} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

2. Wir beweisen die Aussage mittels Induktion. Im Induktionsschritt werden wir verwenden, dass wir die Form der Begleitmatrix genau kennen, und diese Form lässt sich am einfachsten für Matrizen der Dimension $n \geq 2$ formulieren. Darum beweisen wir die Aussage im Fall $n = 1$ separat.

"$n = 1$": Falls $n = 1$ und $P = X + a_0$, dann ist $P = (-1)^n \mathrm{char}_{(-a_0)}(X)$.

"$n = 2$": Falls $n = 2$ und $P = X^2 + a_1 X + a_0$, dann ist

$$P = \det\begin{pmatrix} -X & 1 \\ -a_0 & -a_1 - X \end{pmatrix} = \mathrm{char}_A(X),$$

wobei $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{smallmatrix}\right)$ ist.

"$n \mapsto n+1$": Angenommen, wir wissen, dass jedes Polynom von Grad n bis auf Multiplikation mit $(-1)^n$ das charakteristische Polynom einer Matrix in $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist. Sei $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$. Dann ist $P = XQ + a_0$ mit $a_0 \in \mathbb{K}$ und $Q \in \mathbb{K}_n[X]$. Sei

Siehe nächstes Blatt!

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ die Begleitmatrix von Q und nehmen wir an, dass A von der Form im Hinweis ist.

Definiere nun eine neue Matrix $C \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{K})$ durch

$$C := \begin{pmatrix} 0 & e_1^T \\ -a_0 e_n & A \end{pmatrix},$$

dann gilt nach Entwicklung nach der ersten Spalte und nach Voraussetzung für A

$$\begin{aligned}\det(C - XI_{n+1}) =& (-X)\det(A - XI_n) \\ & + (-1)^{n+2}(-a_0)\det\left(I_n - X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{n-1} & 0\end{pmatrix}\right) \\ =& (-X)(-1)^n Q + (-1)^{n+1}a_0 \\ =& (-1)^{n+1}(XQ + a_0) = (-1)^{n+1}P\end{aligned}$$

wie gewünscht.

Man beachte, dass auch C im Induktionsschritt wieder die für die Induktion verlangte Form aus dem Hinweis hat und folglich gilt die Aussage nach Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$.

3. **a)** Wir wissen aus der Vorlesung, dass eine Menge von Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig ist. Sei $\{1, \ldots, k\} = I \sqcup J$, sodass $v_i = 0$ genau dann gilt, wenn $i \in I$. Dann ist die Menge $\{v_i \mid i \in J\}$ eine Menge von $|J|$ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten und nach dem, was in der Vorlesung gezeigt wurde, insbesondere linear unabhängig. Das heisst, es gibt keine nicht-triviale Darstellung der 0 mit Elementen in $\{v_i \mid i \in J\}$. Da aber nach Voraussetzung $0 = \sum_{i\in J} v_i$, muss also J die leere Menge sein und folglich ist $I = \{1, \ldots, k\}$. Insbesondere gilt also $v_1 = \cdots = v_k = 0$.

b) Wir überlassen es Ihnen, sich zu vergewissern, dass beide Definitionen genau dieselben sind, wenn $|\Lambda| = 2$. Sollte dies nicht ersichtlich sein, verlangen Sie bitte, dass das in Ihrer Übungsstunde diskutiert wird.

Für die Anwendung müssen wir nur zeigen, dass $E_{\lambda_i} \cap \sum_{j\neq i} E_{\lambda_j} = \{0\}$. Sei $v \in E_{\lambda_i} \cap \sum_{j\neq i} E_{\lambda_j}$, dann existieren $\{v_j \mid j \neq i\}$ mit $v_j \in E_{\lambda_j}$, sodass $v = \sum_{j\neq i} v_j$. Da E_{λ_i} ein Unterraum ist, ist auch $v_i := -v$ in E_{λ_i} enthalten, und somit ist

$$0 = v_1 + \cdots + v_k.$$

Es folgt unter Verwendung von a), dass $v_1 = \cdots = v_k = 0$ gilt, und insbesondere ist $v = -v_i = 0$.

Bitte wenden!

4. a) Tatsächlich gilt für $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1 - v_2 \in W$, dass

$$T(v_1) + W = \big(T(v_2) + \underbrace{T(v_1 - v_2)}_{\in W}\big) + W = T(v_2) + W.$$

Somit ist $\overline{T}$ wohldefiniert. Die Linearität folgt sofort:

$$\begin{aligned}\overline{T}\big((v_1 + W) + \mu(v_2 + W)\big) =& \overline{T}\big((v_1 + \mu v_2) + W\big)\\ =& T(v_1 + \mu v_2) + W\\ =& \big(T(v_1) + \mu T(v_2)\big) + W\\ =& \big(T(v_1) + W\big) + \mu\big(T(v_2) + W\big)\\ =& \overline{T}(v_1 + W) + \mu\overline{T}(v_2 + W).\end{aligned}$$

Des Weiteren ist $\overline{T}$ diagonalisierbar. Einerseits gilt nämlich: Sei $v \in V$ ein Eigenvektor von T zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$, dann ist

$$\overline{T}(v + W) = T(v) + W = \lambda v + W = \lambda(v + W)$$

nach Definition der Vektorraumstruktur auf V/W. Andererseits ist für eine beliebige Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V die Menge der Nebenklassen $\{v_1 + W, \dots, v_n + W\}$ ein Erzeugendensystem von V/W und enthält somit eine Basis von V/W. Da V eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von T besitzt, existiert also eine Basis von V/W bestehend aus Eigenvektoren von $\overline{T}$.

b) Sei $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ die Menge der Eigenwerte von T, so dass $\lambda_i \neq \lambda_j$ wann immer $1 \leq i < j \leq k$. Wir haben in der Vorlesung gezeigt, dass

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i},$$

wobei $E_{\lambda_i} = \{v \in V \mid T(v) = \lambda_i v\}$. Wir zeigen nun, dass

$$W = \bigoplus_{i=1}^{k} (W \cap E_{\lambda_i}).$$

Sei $1 \leq i \leq k$, dann gelten $(W \cap E_{\lambda_i}) \subseteq E_{\lambda_i}$ und $\sum_{j \neq i}(W \cap E_{\lambda_j}) \subseteq \sum_{j \neq i} E_{\lambda_j}$. Somit gilt also auch $\{0\} = (W \cap E_{\lambda_i}) \bigcap \sum_{j \neq i}(W \cap E_{\lambda_j})$ und die Summe ist tatsächlich eine direkte Summe. Des Weiteren ist klar, dass $\bigoplus_{i=1}^{k}(W \cap E_{\lambda_i}) \subseteq W$. Wir müssen also nur die umgekehrte Inklusion beweisen. Sei nun $w \in W$ und seien $v_1, \dots, v_k \in V$, so dass $v_i \in E_{\lambda_i}$ und $w = v_1 + \cdots v_k$, dann ist

$$0 = w + W = (v_1 + \cdots + v_k) + W = (v_1 + W) + \cdots + (v_k + W)$$

Siehe nächstes Blatt!

Jedes von 0 verschiedene Element in $\{v_i + W \mid 1 \leq i \leq k\}$ ist ein Eigenvektor von $\overline{T}$ und für je zwei solche Elemente sind die Eigenwerte verschieden. Nach dem in dieser Serie bewiesenen Lemma aus der Vorlesung gilt also $v_i + W = 0$ für alle $1 \leq i \leq k$. Also gilt $v_i \in W$ für jedes $1 \leq i \leq k$ und somit folgt $w \in \sum_{i=1}^{k}(W \cap E_{\lambda_i})$.

Nun ist aber $T|_{W \cap E_\lambda} = \lambda I_{W \cap E_\lambda}$ und somit diagonalisierbar. Das heisst, $W \cap E_\lambda$ besitzt eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von $T|_{W \cap E_\lambda}$ und somit insbesondere von $T|_W$. Da für jede Familie von Basen $\mathcal{B}_\lambda$ von $W \cap E_\lambda$ die Vereinigung $\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda \in \sigma(T)} \mathcal{B}_\lambda$ über die Menge $\sigma(T)$ bestehend aus den Eigenwerten von T eine Basis von W ist, besitzt also W eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von $T|_W$ und somit ist $T|_W$ diagonalisierbar.

c) Im Folgenden ist $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_r\} \subseteq \mathrm{End}(V)$ eine endliche Familie kommutierender und diagonalisierbarer Operatoren. Wir beweisen die simultane Diagonalisierbarkeit mittels Induktion über $r = |\mathcal{T}|$.

Falls $r = 1$, dann ist $\mathcal{T}$ nach Annahme simultan diagonalisierbar und es ist nichts zu zeigen.

Sei nun $r \geq 2$ und die Aussage richtig für jede kommutierende und diagonalisierbare Familie von höchstens $r-1$ Operatoren. Nach Annahme ist T_r diagonalisierbar, d.h. es existiert eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V, deren Elemente alles Eigenvektoren von T_r sind, d.h. für alle $1 \leq i \leq n$ existiert ein $\lambda_i \in \mathbb{K}$, so dass $T_r(v_i) = \lambda v_i$. Im Folgenden seien $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ die Eigenwerte von T_r. Wir haben in der Vorlesung gezeigt, dass

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_k},$$

wobei $E_{\lambda_i} = \{v \in V \mid T_r(v) = \lambda_i v\}$.

Man beachte, dass jeder mit T_r kommutierende Operator S den Unterraum E_{λ_i} invariant lässt, das heisst $S(E_{\lambda_i}) \subseteq E_{\lambda_i}$. Sei nämlich $S \in \mathrm{End}(V)$, so dass $TS = ST$, dann folgt für jedes $v \in E_{\lambda_i}$, dass

$$T(Sv) = (TS)(v) = (ST)(v) = S(Tv) = S(\lambda_i v) = \lambda_i Sv$$

und somit ist $Sv \in E_{\lambda_i}$.

Wir betrachten nun die Familie $\mathcal{T}' = \{T_1, \ldots, T_{r-1}\}$. Da $T_j T_k = T_k T_j$ für alle $1 \leq j < r$, folgt $T_j|_{E_{\lambda_i}} \in \mathrm{End}(E_{\lambda_i})$. Aus Teilaufgabe b) folgt, dass $T_j|_{E_{\lambda_i}}$ diagonalisierbar ist für jedes $1 \leq j < r$. Da die $T_1|_{E_{\lambda_i}}, \ldots, T_{r-1}|_{E_{\lambda_i}}$ kommutieren, sind sie simultan diagonalisierbar und folglich existiert eine Basis von E_{λ_i} bestehend aus Eigenvektoren von $T_1, \ldots, T_{r-1}$. Da jedes Element von E_{λ_i} ein Eigenvektor von T_r ist, erhalten wir eine Basis von E_{λ_i} bestehend aus Eigenvektoren von $T_1, \ldots, T_r$. Unter Verwendung von $V = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$ erhalten wir eine Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von $T_1, \ldots, T_r$.

Bitte wenden!

d) Im Folgenden sei $n = \dim V$. Wir bemerken zuerst, dass $\mathrm{span}(\mathcal{T}) \subseteq \mathrm{End}(V)$ ein endlichdimensionaler Unterraum ist, da $\dim \mathrm{End}(V) = n^2$. Insbesondere besitzt $\mathrm{span}(\mathcal{T})$ eine endliche Basis. Nun ist die Abbildung $\mathrm{End}(V) \to M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $T \mapsto [T]_{\mathcal{B}}$ für jede geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V linear und da die Menge der Diagonalmatrizen ein Unterraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist, reicht es zu zeigen, dass eine Basis von $\mathrm{span}(\mathcal{T})$ simultan diagonalisierbar ist. Da aber jede Basis von $\mathrm{span}(\mathcal{T})$ endlich ist, folgt insbesondere, dass es ausreicht, die Behauptung für endliche Teilmengen von $\mathrm{End}(V)$ zu beweisen, was wir schon in Teilaufgabe c) erledigt haben.

5. a) Da die Spur $\mathrm{tr} : M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung ist, ist $\mathrm{sl}_3(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ ein Vektorraum. Es reicht also zu zeigen, dass die Klammer eine wohldefinierte, antisymmetrische, bilineare Abbildung ist, die die Jacobi-Identität erfüllt.

Die Bilinearität der Klammer folgt aus der Definition der Matrixmultiplikation und der Vektorraumstruktur auf $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Die Antsymmetrie folgt ebenfalls direkt:

$$[A, A] = A^2 - A^2 = 0 \quad \big(A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})\big).$$

Die Jacobi-Identität gilt ebenfalls für die Klammer auf ganz $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Seien $A, B, C \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, dann gilt

$$\begin{aligned}
&[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] \\
&\qquad = [AB - BA, C] + [BC - CB, A] + [CA - AC, B] \\
&\qquad = ABC - BAC - CAB + CBA \\
&\qquad\qquad + BCA - CBA - ABC + ACB \\
&\qquad\qquad + CAB - ACB - BCA + BAC = 0.
\end{aligned}$$

Es reicht also zu zeigen, dass die Klammer als Verknüpfung auf $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ wohldefiniert ist. Seien also $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, dann gilt wegen

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}([A, B]) &= \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} - \sum_{i=1}^{n} (BA)_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} B_{ik} A_{ki} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ki} B_{ik} = 0.
\end{aligned}$$

Insbesondere ist $\mathrm{sl}_3(\mathbb{R})$ unter der Klammer abgeschlossen.

Siehe nächstes Blatt!

b) Seien $A_1, A_2 \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig, dann gilt für alle $B \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$

$$\mathrm{ad}_{A_1+\lambda A_2}(B) = [A_1 + \lambda A_2, B] = [A_1, B] + \lambda[A_2, B] = (\mathrm{ad}_{A_1} + \lambda \mathrm{ad}_{A_2})(B),$$

und da B beliebig war, folgt die Linearität von ad.

Seien nun $A, B, C \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned}[\mathrm{ad}_A, \mathrm{ad}_B](C) &= (\mathrm{ad}_A \circ \mathrm{ad}_B)(C) - (\mathrm{ad}_B \circ \mathrm{ad}_A)(C) \\ &= \mathrm{ad}_A([B, C]) - \mathrm{ad}_B([A, C]) = [A, [B, C]] - [B, [A, C]] \\ &= -[[B, C], A] - [[C, A], B] = [[A, B], C] \\ &= \mathrm{ad}_{[A,B]}(C),\end{aligned}$$

und da A, B, C beliebig waren, folgt die Behauptung.

c) Wir bemerken, dass

$$\dim \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) = \mathrm{nullity}(\mathrm{tr}) = \dim M_{3\times 3}(\mathbb{R}) - \mathrm{Rang}(\mathrm{tr}) = 8.$$

Sei $D_3 \subseteq M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ der Unterraum der Matrizen, deren Einträge abseits der Diagonalen allesamt 0 sind. Dann ist D_3 ein dreidimensionaler Unterraum und $\mathfrak{a}$ ist der Kern der linearen Abbildung, die ein Element in D_3 auf die Summe seiner Diagonaleinträge abbildet. Aus der Dimensionsformel folgt also, dass $\dim \mathfrak{a} = 2$. Seien $1 \leq i, j \leq 3$ mit $i \neq j$, dann ist $E_{i,j} \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ und somit

$$\mathfrak{s} = \langle \{E_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j\} \rangle \subseteq \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$$

ein sechsdimensionaler Unterraum. Da $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{a} = \{0\}$, existieren also $H_1, H_2 \in \mathfrak{a}$, sodass $\{H_1, H_2\} \cup \{E_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j\}$ eine Basis von $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ ist. Wir behaupten, dass dies eine Basis bestehend aus gemeinsamen Eigenvektoren für $\mathrm{ad}(\mathfrak{a})$ ist.

Matrizen, deren Einträge abseits der Diagonalen verschwinden, kommutieren miteinander. Nach Teilaufgabe b) ist $\mathrm{ad}(\mathfrak{a})$ eine Familie kommutierender Operatoren und wenn jedes Element in A ad-diagonalisierbar, dann ist die Familie simultan diagonalisierbar.

Aus der Kommutativität von $\mathfrak{a}$ erhalten wir für alle $A \in \mathfrak{a}$, dass

$$\mathrm{ad}_A(H_i) = [A, H_i] = AH_i - H_iA = 0 \quad (i = 1, 2)$$

und da $A \in \mathfrak{a}$ beliebig war sind H_1 und H_2 somit gemeinsame Eigenvektoren zum Eigenwert 0 für $\mathrm{ad}(\mathfrak{a})$.

Seien nun $1 \leq i, j \leq 3$ mit $i \neq j$ und sei $A = a_1E_{11} + a_2E_{22} + a_3E_{33} \in \mathfrak{a}$. Dann gilt wegen der Bilinearität der Klammer, dass

$$[A, E_{ij}] = \sum_{k=1}^{3} a_k[E_{kk}, E_{ij}] = \sum_{k=1}^{3}(E_{kk}E_{ij} - E_{ij}E_{kk}) = (a_i - a_j)E_{ij}$$

Bitte wenden!

und somit ist E_{ij} ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_{ij}(A) = a_i - a_j$. Dies zeigt die Behauptung.

Bemerkung: Wir wollen an dieser Stelle betonen, dass wegen der Linearität der Lie-Klammer die gefundenen "Eigenwerte $\lambda_{ij} : \mathfrak{a} \to \mathbb{R}$ von $\mathrm{ad}(\mathfrak{a})$" de facto Elemente des Dualraums $\mathfrak{a}^*$ sind, d.h. für $A_1, A_2 \in \mathfrak{a}$, $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda_{ij}(A_1 + sA_2) = \lambda_{ij}(A_1) + s\lambda_{ij}(A_2).$$