Serie 16:
Diagonalisierbarkeit

1. Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume folgender Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Q}$.

$^\heartsuit$**b)** $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Q}$.

c) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{C}$.

d) $E = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ $(\varphi \in \mathbb{R})$ über $\mathbb{C}$.

2. Zeigen Sie: Jedes normierte Polynom

$$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in P(\mathbb{K})$$

von Grad $n \geq 1$ ist bis auf Multiplikation mit einem Faktor $(-1)^n$ das charakteristische Polynom einer Matrix in $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Hinweis: Betrachten Sie eine Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ * & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

mit geeigneten Skalaren in der letzten Zeile.

Bemerkung: Die so erhaltene Matrix A heisst *Begleitmatrix* des Polynoms P.

Bitte wenden!

3. Beweisen Sie die folgenden Aussagen aus der Vorlesung:

$^\heartsuit$**a)** Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $T \in \operatorname{End}(V)$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$. Seien $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ die Eigenräume zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Seien $v_i \in E_{\lambda_i}$ $(1 \leq i \leq k)$. Falls $v_1 + \cdots + v_k = 0$, dann gilt $v_1 = \cdots = v_k = 0$.

b) Für eine Indexmenge Λ und eine Familie $\{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ von Unterräumen von V definieren wir die Summe durch

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda := \left\{ \sum_{i=1}^{r} v_i \,\middle|\, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda \text{ and } \forall 1 \leq i \leq r : v_i \in V_{\lambda_i} \right\}.$$

und wir setzen $\sum_{\lambda \in \{\}} V_\lambda := \{0\}$. Wir sagen, die Summe ist eine direkte Summe – in Symbolen $\sum_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ – falls für alle $\mu \in \Lambda$ gilt

$$V_\mu \cap \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} V_\lambda = \{0\}.$$

Überprüfen Sie, dass diese Definition einer direkten Summe im Falle von $|\Lambda| = 2$ mit der ursprünglichen Definition übereinstimmt und zeigen Sie für V, T und $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ wie in Teilaufgabe $^\heartsuit$a), dass gilt

$$\sum_{i=1}^{k} E_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}.$$

4. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und sei $\mathcal{T} \subseteq \operatorname{End}(V)$ eine kommutierende Familie diagonalisierbarer Operatoren, d.h. für $S, T \in \mathcal{T}$ gilt $ST = TS$ und jedes $T \in \mathcal{T}$ ist diagonalisierbar. Zeigen Sie: $\mathcal{T}$ ist *simultan diagonalisierbar*, d.h. es existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass für alle $T \in \mathcal{T}$ gilt $[T]_\mathcal{B}$ ist diagonal.

Gehen Sie wie folgt vor:

a) Sei $T \in \operatorname{End}(V)$ diagonalisierbar und $W \subseteq V$ ein T-invarianter Unterraum, i.e. $T(W) \subseteq W$. Dann ist die Abbildung

$$\overline{T} : V/W \to V/W, \overline{T}(v + W) := T(v) + W$$

wohldefiniert, linear und diagonalisierbar.

b) Zeigen Sie: Angenommen $T \in \operatorname{End}(V)$ ist diagonalisierbar und $W \subseteq V$ ist ein T-invarianter Unterraum ist, dann ist $T|_W \in \operatorname{End}(W)$ diagonalisierbar. Geben Sie hierfür die Eigenraumzerlegung von W bezüglich $T|_W$ an.

Siehe nächstes Blatt!

c) Zeigen Sie, dass endliche Familien kommutierender und diagonalisierbarer Operatoren simultan diagonalisierbar sind.

d) Beweisen Sie, dass jeder Unterraum von $\mathrm{End}(V)$ bestehend aus kommutierenden, diagonalisierbaren Operatoren simultan diagonalisierbar ist und folgern Sie nun die Behauptung für allgemeine $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{End}(V)$.

*__5.__ Eine *Lie-Algebra* ist ein Vektorraum V zusammen mit einer antisymmetrischen bilinearen (bzw. 2-multilinearen) Abbildung $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$, sodass die Jacobi-Identität gilt, d.h.$\tilde{}$für alle $u, v, w \in V$ gilt

$$[[u,v],w] + [[v,w],u] + [[w,u],v] = 0.$$

Beispiele für Lie-Algebren sind der Vektorraum $\mathrm{End}(W)$ der Endomorphismen eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes versehen mit der *Lie-Klammer* $[S,T] = S \circ T - T \circ S$ oder $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem Kreuzprodukt $[v,w] = v \times w$.

a) Betrachten Sie die Menge

$$\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$$

und zeigen Sie, dass $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ mit der Klammer

$$[A,B] = AB - BA \qquad \big(A, B \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})\big)$$

eine Lie-Algebra ist.

b) Gegeben $A \in \mathrm{sl}_3(\mathbb{R})$ bezeichnen wir mit $\mathrm{ad}_A \in \mathrm{End}\big(\mathrm{sl}_3(\mathbb{R})\big)$ die Abbildung

$$\mathrm{ad}_A(B) = [A,B] \qquad \big(B \in \mathrm{sl}_3(\mathbb{R})\big).$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{ad} : \mathrm{sl}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{End}\big(\mathrm{sl}_3(\mathbb{R})\big)$ linear ist, und dass gilt

$$[\mathrm{ad}_A, \mathrm{ad}_B] = \mathrm{ad}_{[A,B]} \qquad \big(A, B \in \mathrm{sl}_3(\mathbb{R})\big)$$

c) Ein Element $A \in \mathrm{sl}_3(\mathbb{R})$ heisst ad-*diagonalisierbar*, falls ad_A diagonalisierbar ist. Zeigen Sie, dass der Unterraum $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ der diagonalen Matrizen simultan ad-diagonalisierbar ist und bestimmen Sie die Eigenwerte eines Elements $A \in \mathfrak{a}$ als Funktion von A sowie die gemeinsamen Eigenräume.

Bitte wenden!

6. Online Abgabe Serie 16:

1. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$, wobei V ein endlichdimensionaler Vektorraum ist. Angenommen T hat weniger als $\dim(V)$ verschiedene Eigenwerte, so ist T nicht diagonalisierbar.

(a) richtig

(b) falsch

2. Wenn $3^{10} = 59049$ ist, was ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{10} ?$$

(a) $\left(\begin{smallmatrix} 29524 & 29525 \\ 29525 & 29524 \end{smallmatrix}\right)$

(b) $\left(\begin{smallmatrix} 29525 & 29524 \\ 29524 & 29525 \end{smallmatrix}\right)$

(c) $\left(\begin{smallmatrix} 59048 & 59050 \\ 59050 & 59048 \end{smallmatrix}\right)$

(d) $\left(\begin{smallmatrix} 59049 & 59050 \\ 59050 & 59049 \end{smallmatrix}\right)$

(e) Keine der obigen Matrizen

3. Eigenvektoren die zum gleichen Eigenwert gehören sind immer linear abhängig.

(a) richtig

(b) falsch

4. Jeder diagonalisierbare Operator hat zumindest einen Eigenwert.

(a) richtig

(b) falsch

Siehe nächstes Blatt!

5. Welche der folgenden vier Aussagen über die rationale Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist **nicht** korrekt?

(a) Die Matrix ist invertierbar.

(b) Der Eigenwert $\lambda = 1$ hat algebraische Vielfachheit 2

(c) $(1, 1, 1)^T$ ist ein Eigenvektor von A.

(d) Die Matrix ist diagonalisierbar.

(e) Alle Aussagen sind korrekt.

6. Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 10 & c \\ 0 & 0 & 100 \end{smallmatrix}\right) \in M_{3\times 3}(\mathbb{Q})$, so gilt

(a) A und A^2 sind diagonalisierbar

(b) A ist diagonalisierbar aber A^2 nicht

(c) A und A^2 haben das gleiche charakteristische Polynom

(d) A^2 ist diagonalisierbar aber A nicht

7. *Prüfung Sommer 2017:* Eine lineare Abbildung T auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V ist diagonalisierbar genau dann, wenn für jeden Eigenwert die geometrische und die algebraische Multiplizität gleich sind.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Bitte wenden!

8. *Prüfung Sommer 2017:* Hat eine 3×3 Matrix A nur einen Eigenwert λ mit geometrischer Vielfachkeit 3, so gilt

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

(a) Wahr.

(b) Falsch.

9. *Prüfung Sommer 2017:* Die inverse Matrix einer invertierbaren diagonalisierbaren Matrix ist diagonalisierbar.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

10. *Wiederholungsprüfung Winter 2018:* Jede reelle 2018×2018 Matrix hat mindestens einen reellen Eigenwert.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

11. *Wiederholungsprüfung Winter 2018:* Ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenvektoren.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Donnerstag, den 1. März 14:00 Uhr im Raum HG J 68, in einem der Fächer beschriftet mit *Abgabe*.