Serie 17:
Satz von Cayley-Hamilton & spezielle Endomorphismen

1. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

a) Sei $T \in \operatorname{End}(V)$. Zeigen Sie, dass die folgenden alles T-invariante Unterräume von V sind:

$$\{0\},\ V,\ \operatorname{Im}(T),\ \operatorname{Ker}(T),\ E_\lambda,$$

wobei im letzten Beispiel λ ein Eigenwert von T sei.

b) Seien $S, T \in \operatorname{End}(V)$, $\Phi \in \operatorname{Aut}(V) = \{\Psi \in \operatorname{End}(V) \mid \Psi \text{ is invertible}\}$ und nehmen Sie an, es gelte $T = \Phi S \Phi^{-1}$. Zeigen Sie, dass ein Unterraum $W \subseteq V$ genau dann S-invariant ist, wenn $\Phi(W)$ ein T-invarianter Unterraum ist.

2. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass $\dim\big(\operatorname{span}(I_n, A, A^2, \ldots)\big) \le n$ gilt.

3. ♡**a)** Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Sei $T \in \operatorname{End}(V)$. Beweisen Sie, dass T genau dann nilpotent ist, wenn 0 der einzige Eigenwert von T in $\mathbb{C}$ ist.

b) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen alle 0. Dann ist die Abbildung L_A nilpotent.

♡**c)** Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $n = \dim(V) < \infty$ und sei $T \in \operatorname{End}(V)$ nilpotent. Dann ist $T^n = 0$.

4. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und sei

$$\operatorname{char}_A(X) = (-1)^n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Bitte wenden!

a) Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $a_0 \neq 0$.

b) Zeigen Sie, dass für invertierbare $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ gilt:

$$A^{-1} = \left(-\frac{1}{a_0}\right)\big((-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I_n\big)$$

c) Berechnen Sie unter Verwendung der obigen Formel A^{-1} für eine Matrix $A \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{K})$. Was können Sie über die Koeffizienten sagen?

5. **a)** Zeigen Sie, dass die Menge $\mu_n \subseteq \mathbb{C}$ der n-ten Einheitswurzeln, d.h.

$$\mu_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\},$$

eine Gruppe der Ordnung $|\mu_n| = n$ ist. Zeigen Sie zudem, dass μ_n *zyklisch* ist, d.h. finden Sie einen Erzeuger $\omega \in \mu_n$ sodass $\mu_n = \{\omega^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

b) Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Wir sagen, dass T endliche Ordnung hat, falls ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $T^N = \mathrm{id}_V$. Zeigen Sie, dass jeder solche Endomorphismus diagonalisierbar ist.

Hinweis: Verwenden Sie wie im Beweis für Involutionen den Erzeuger von μ_N um zu zeigen, dass jeder Endomorphismus endlicher Ordnung diagonalisierbar ist.

***6.** Sei G eine Gruppe. Eine Abbildung $\varphi : G \to \mathrm{Gl}_N(\mathbb{C})$ heisst *Darstellung von G*, wenn für alle $g, h \in G$ gilt $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$.[1] Die Darstellung heisst *trivial*, falls $\varphi(G) = I_N$.

Im Folgenden sei $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen, wobei p eine ungerade Primzahl ist. Wir betrachten die Gruppe $G \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{F}_p)$ der 2×2-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{F}_p$ und mit Determinante gleich 1.

a) Zeigen Sie, dass für jede Darstellung gilt:

$$\varphi(e) = I_N \text{ und } \varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1} \quad (g \in G).$$

b) Betrachten Sie die Abbildung $\mathrm{sq} : \mathbb{F}_p^\times \to \mathbb{F}_p^\times$ gegeben durch $\mathrm{sq}(a) = a^2$ und definieren Sie auf der Menge $\mathbb{F}_p^\times = \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ die Äquivalenzrelation $a \sim b$

[1] Eine Darstellung ist ein Spezialfall eines sogenannten Gruppenhomomorphismus, womit wir – ähnlich wie bei Vektorräumen – eine Abbildung zwischen zwei Gruppen bezeichnen, die die algebraische Struktur erhält.

Siehe nächstes Blatt!

falls gilt $\operatorname{sq}(a) = \operatorname{sq}(b)$. Beweisen Sie, dass jede Äquivalenzklasse genau zwei Elemente enthält und folgern Sie, dass die Anzahl der Quadrate

$$\{b \in \mathbb{F}_p^\times \mid \exists\, a \in \mathbb{F}^\times : b = a^2\}$$

in $\mathbb{F}_p^\times$ genau $\frac{p-1}{2}$ beträgt.

c) Wir schreiben

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{F}_p \right\} \text{ und } N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{F}_p \right\}.$$

Zeigen Sie, dass U und N zyklische Gruppen sind, und dass jedes $g \in G$ als Produkt der Form

$$g = n_2 u_2 n_1 u_1$$

mit $u_1, u_2 \in U$ und $n_1, n_2 \in N$ geschrieben werden kann.

d) Sei $\varphi : G \to \mathrm{Gl}_N(\mathbb{C})$ eine nicht-triviale Darstellung von G. Zeigen Sie, dass $N \geq \frac{p-1}{2}$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Elemente $\varphi\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\varphi\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und beweisen Sie, dass eines dieser beiden Elementen einen nicht-trivialen Eigenwert besitzt. Sei $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ oder $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und sei $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$ für ein $a \in \mathbb{F}_p^\times$. Berechnen Sie $\alpha^{-1} u \alpha$.

Bitte wenden!

7. Online-Abgabe

1. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $T \in \operatorname{End}(V)$. Dann existiert ein Polynom p von Grad $\dim V$ und mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$, sodass $p(T)$ die Nullabbildung ist.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

2. Jedes Polynom mit Leitkoeffizient $(-1)^n$ ist charakteristisches Polynom eines Operators.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

3. Betrachte die lineare Abbildung auf $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Was sind die invarianten Unterräume von L_A?

(a) $\mathbb{R}^2$ und $\operatorname{span}\{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$

(b) $\mathbb{R}^2$ und $\{0\}$

(c) $\mathbb{R}^2$, $\{0\}$ und $\operatorname{span}\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$

(d) $\mathbb{R}^2$

4. Sei A eine $n \times n$ Matrix mit $\operatorname{char}_A(X) = X^2 - X - 1$, dann ist

(a) A^{-1} existiert nicht.

(b) A^{-1} existiert aber kann nicht aus diesen Angaben hergeleitet werden.

(c) $A^{-1} = A + I_n$.

(d) $A^{-1} = A - I_n$.

Siehe nächstes Blatt!

5. Betrachte die Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (0, x, y)$. So ist $T + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ eine Nullstelle des Polynoms

(a) $p(X) = X$.

(b) $p(X) = X^2$.

(c) $p(X) = X^3$.

(d) $T + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ ist nicht eine Nullstelle eines Polynoms aus der obigen Liste.

6. Sei A eine 5×5 obere Dreiecksmatrix mit allen Einträgen auf der Diagonalen gleich 0, so gilt für die Matrix $I_5 + A$:

(a) Sie ist idempotent.

(b) Sie ist invertierbar.

(c) Sie ist singulär.

(d) Sie ist nilpotent.

7. *Prüfung Winter 2018:* Es gibt $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, sodass AB nilpotent ist, aber BA nicht nilpotent ist.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

8. *Prüfung Winter 2018:* Sei A eine Matrix mit $\mathrm{char}_A(X) = X^2 - 3X$, so ist A invertierbar.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

Bitte wenden!

9. *Prüfung Winter 2018:* Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $T \in \mathrm{End}(V)$ und sei char_T das charakteristische Polynom von T. Dann gilt $\mathrm{char}_T(T) = 0$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

10. *Prüfung Winter 2018:* Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn $\det(A) \neq 0$ ist.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Donnerstag, den 8. März vor 14:00 Uhr im Raum HG J 68, in einem der Fächer beschriftet mit *Abgabe*.