Lösung 19: Gram-Schmidt Orthogonalisierung, adjungierte Abbildungen

1. **a)** Wegen der Linearität im ersten Argument gilt sicherlich

$$\forall w \in S : \langle 0, w\rangle = 0.$$

Somit ist $0 \in S^\perp$ und also $S^\perp$ nicht-leer. Seien nun $v_1, v_2 \in S^\perp$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist wieder wegen der Linearität im ersten Argument

$$\forall w \in S : \langle v_1 + \lambda v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \lambda\langle v_2, w\rangle = 0$$

und also $v_1 + \lambda v_2 \in S^\perp$. Also ist $S^\perp \subseteq V$ ein Unterraum.

b) Wegen Linearität im ersten Argument und Symmetrie gilt für alle $v \in V$, dass $\langle v, 0\rangle = \langle 0, v\rangle = 0$. Folglich ist $V \subseteq \{0\}^\perp$ und insbesondere folgt $\{0\}^\perp = V$.

Sei nun $v \in V^\perp$, dann ist per definitionem $0 = \langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$ für alle $w \in V$. Wie in der letzten Serie gezeigt wurde, ist v durch die Abbildung $V \ni w \mapsto \langle w, v\rangle$ eindeutig bestimmt, und da nach Annahme gilt $\langle w, v\rangle = \langle w, 0\rangle$ für alle $w \in V$, folgt also $v = 0$. Also ist $V^\perp = \{0\}$.

c) Sei $w \in W \cap W^\perp$, dann ist $0 = \langle w, w'\rangle$ für alle $w' \in W$, da nach Voraussetzung $w \in W^\perp$ gilt. Insbesondere ist, wegen $w \in W$ auch $0 = \langle w, w\rangle$ und wegen der Positivität folgt $w = 0$.

Bevor wir zeigen, dass $W = (W^\perp)^\perp$, wollen wir anmerken, dass die Aussage nur gilt, falls W ein topologisch abgeschlossener Unterraum von V ist, zum Beispiel endlichdimensional. Insbesondere muss ein Beweis diese Tatsache – bzw. in diesem vereinfachten Falle die endliche Dimension – tatsächlich verwenden.

Da V endlichdimensional ist, sind auch W und $W^\perp$ endlichdimensional. Falls $W = \{0\}$ gilt, dann gilt die Aussage wegen dem, was weiter oben bewiesen wurde. Sei also $W \neq \{0\}$, dann können wir unter Verwendung des Gram-Schmidt

Verfahrens und anschliessender Normalisierung annehmen, dass W eine geordnete Orthonormalbasis $(w_1, \ldots, w_m)$ besitzt und unter Verwendung des Basisergänzungssatzes sowie des Gram-Schmidt Verfahrens existieren orthonormale Vektoren $w_{m+1}, \ldots, w_n$ (wobei $n = \dim(V)$), sodass $(w_1, \ldots, w_n)$ eine geordnete Orthonormalbasis von V ist. Wie in der Vorlesung gezeigt (vgl. Proposition 1 in §6.2), ist $v \in W^\perp$ genau dann, wenn $v \in \operatorname{span}\{w_{m+1}, \ldots, w_m\}$, bzw. nach nochmaliger Anwendung desselben Arguments ist $v \in (W^\perp)^\perp$ genau dann, wenn $v \in \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_m\} = W$.

d) Sei $v \in \operatorname{span}(S)^\perp$, dann gilt wegen $S \subseteq \operatorname{span}(S)$ sicherlich $v \in S^\perp$. Wir müssen also nur noch zeigen, dass aus $v \in S^\perp$ folgt $v \in \operatorname{span}(S)^\perp$. Sei $v \in S^\perp$ und $w \in \operatorname{span}(S)$, dann existieren $s_1, \ldots, s_m \in S$ sowie $\alpha_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, sodass $w = \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i$ und somit folgt aus der Symmetrie sowie Linearität im zweiten Argument

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i \langle v, s_i \rangle = 0$$

und also $v \in \operatorname{span}(S)^\perp$.

e) Wie eben argumentiert, können wir zeigen, dass $V = \operatorname{span}(S)^\perp \oplus \operatorname{span}(S)$. Dies wurde in Proposition 1, §6.2 gezeigt.

2. **a)** Wir haben in Aufgabe 1 gezeigt, dass $V = U \oplus U^\perp$ gilt. Sei $v = u + u'$ mit $u \in U$ und $u' \in U^\perp$. Wir wissen, dass diese Zerlegung eindeutig ist, und per definitionem ist $\langle v - u, w \rangle = \langle u', w \rangle = 0$ für alle $w \in U$. Angenommen $\tilde{u} \in U$, sodass $\langle v - \tilde{u}, w \rangle = 0$ für alle $w \in U$, dann ist $v - \tilde{u} \in U^\perp$ und aus $v = \tilde{u} + (v - \tilde{u})$ und der Eindeutigkeit der Zerlegung volgt $\tilde{u} = u$. Wir setzten also $P_U(v) := u$. Wir bemerken, dass $\lambda v = \lambda u + \lambda u'$ und somit ist für alle $w = \tilde{u} + \tilde{u}'$ mit $\tilde{u} \in U$, $\tilde{u}' \in U^\perp$ auch

$$w + \lambda v = \underbrace{\tilde{u} + \lambda u}_{\in U} + \underbrace{\tilde{u}' + \lambda u'}_{\in U^\perp},$$

sodass $P_U(w + \lambda v) = \tilde{u} + \lambda u = P_U(w) + \lambda P_U(v)$, sodass P_U linear ist.

b) Nach obiger expliziter Konstruktion von P_U, wurde dies bereits in Serie 7, Aufgabe 3b der Linearen Algebra I bewiesen.

c) Sei $w \in U$, dann ist

$$\begin{aligned} \|w - v\|^2 &= \big\|w - P_U(v) - \big(v - P_U(v)\big)\big\|^2 \\ &= \|w - P_U(v)\|^2 + \|v - P_U(v)\|^2 \\ &\geq \|v - P_U(v)\|^2 \end{aligned}$$

nach Aufgabe 4a von Blatt 4. Dies beweist die Behauptung.

Siehe nächstes Blatt!

3. **a)** Man überprüft leicht, dass die beiden gegeben Vektoren orthognal sind. Normalisierung liefert die Orthonormalbasis

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen bereits an dieser Stelle eine Basis des eindimensionalen orthogonalen Komplements $U^\perp$. Hierzu ergänzen wir $\{v_1, v_2\}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ und wenden auf die resultierende Basis das Gram-Schmidt Verfahren mit anschliesssender Normalisierung an. Man überprüft durch Berechnung einer 3×3-Determinante, dass beispielsweise für $v_3' = (0, -1, 1)^T$ die Menge $\{v_1, v_2, v_3'\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. Gram-Schmidt angewendet auf diese Basis liefert nach Normalisierung eine Orthonormalbasis $\{v_1, v_2, v_3\}$ mit

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

Da $U = \mathrm{span}\{v_1, v_2\}$ und nach Konstruktion $v_3 \in U^\perp$, ist $\{v_3\}$ eine Basis von $U^\perp$.

b) Wir haben in der Vorlesung gezeigt, dass für jede geordnete Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$ von $\mathbb{R}^3$ und für jedes $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ die Abbildungsmatrix $A = [T]_\mathcal{B}$ gegeben ist durch

$$A_{ij} = \langle T(w_j), w_i \rangle.$$

Wir wenden dies an auf die Basis $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3)$ von oben, die Abbildung $T := P_U$ und verwenden am Schluss die Basiswechselmatrix $Q := [I_{\mathbb{R}^3}]_\mathcal{B}^{\mathcal{E}_3}$ zur Bestimmung von $[P_U]_{\mathcal{E}_3} = QAQ^{-1}$. Nach Konstruktion gilt

$$P_U(v_j) = \begin{cases} v_j & \text{falls } v_j \in U, \text{ bzw. } j = 1, 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und insbesondere ist also

$$[P_U]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Es ist klar, dass

$$Q = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

Da (v_1, v_2, v_3) eine Orthonormalbasis ist, folgt $Q^T Q = I_3$ und folglich ist $Q^{-1} = Q^T$. Es gilt also

$$\begin{aligned}
[P_U]_{\mathcal{E}_3} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung von $[P_{U^\perp}]_{\mathcal{E}_3}$ verwenden wir die Tatsache, dass nach Aufgabe 2 für alle $v \in \mathbb{R}^3$ gilt $v = P_U(v) + P_{U^\perp}(v) = (P_U + P_{U^\perp})(v)$ und folglich ist $I_{\mathbb{R}^3} = P_U + P_{U^\perp}$. Wegen der Linearität von $\operatorname{End}(V) \ni T \mapsto [T]_{\mathcal{E}_3}$, folgt $[P_{U^\perp}]_{\mathcal{E}_3} = I_3 - [P_U]_{\mathcal{E}_3}$ und also

$$[P_{U^\perp}]_{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

c) $U^\perp$ ist nach Aufgabe 1d der Durchschnitt der Kerne der Abbildungen $\mathbb{R}^3 \ni v \mapsto \langle v, v_1 \rangle$ und $\mathbb{R}^3 \ni v \mapsto \langle v, v_2 \rangle$, bzw. $U^\perp$ ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\sqrt{3}}x + \tfrac{1}{\sqrt{3}}y + \tfrac{1}{\sqrt{3}}z &= 0 \\ -\tfrac{1}{\sqrt{2}}x + \tfrac{1}{\sqrt{2}}y \qquad\quad &= 0 \end{aligned}$$

und analog ist U die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$-\tfrac{1}{\sqrt{6}}x - \tfrac{1}{\sqrt{6}}y + \tfrac{2}{\sqrt{6}}y = 0\ ,$$

wobei wir hier verwendet haben, dass $U = (U^\perp)^\perp$, was in Aufgabe 1c bewiesen wurde.

4. a) Sei $W \subseteq \mathrm{R}^n$ der Unterraum von $\mathbb{R}^n$, der von den Spalten von A aufgespannt wird und nimm für den Moment an, dass $\dim(W) = m$ und $W = \operatorname{span}\{A^{(1)}, \ldots, A^{(m)}\}$. Unter Verwendung des Gram-Schmidt Verfahrens existiert eine Orthogonalbasis $w_1, \ldots, w_m \in W$ von W, sodass gilt

$$A^{(j)} = w_j + \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_{ij} w_i \quad (1 \le j \le m)$$

Siehe nächstes Blatt!

für eine obere Dreiecksmatrix $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^m \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$. Sei $v_i := \frac{1}{\|w_i\|} w_i$ für $1 \leq i \leq m$. Dann ist $\{v_1, \ldots, v_m\}$ eine Orthonormalbasis von W und es gilt

$$A^{(j)} = \sum_{i=1}^{j} \beta_{ij} v_i \quad (1 \leq j \leq m)$$

für eine obere Dreiecksmatrix $(\beta_{ij})_{i,j=1}^m \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$.

Wir ergänzen $\{v_1, \ldots, v_m\}$ zu einer Orthonormalbasis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von $\mathbb{R}^n$. Dann existiert nach Voraussetzung eine obere Dreiecksmatrix $(\beta_{ij})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit

$$A^{(j)} = \sum_{i=1}^{j} \beta_{ij} v_i \quad (1 \leq i \leq n),$$

denn $A^j \in \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_m\}$ nach Annahme. Sei $R = (\beta_{ij})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, Q wie in der Aufgabenstellung für die geordnete Basis $(v_1, \ldots, v_n)$, dann ist $A = QR$ nach Konstruktion.

Falls $W \neq \operatorname{span}\{A^{(1)}, \ldots, A^{(m)}\}$, dann ergänzen wir an den Stellen der linear abhängigen Spalten die oben im ersten Schritt gefundene orthogonale Basis einfach durch Elemente einer orthonormalen Basis der orthogonalen Komplements. Per Definition von W fügt dies Nullspalten in R ein, was aber die Gültigkeit der Aussage nicht ändert und somit folgt die Aussage im allgemeinen Fall.

b) Sei nun A invertierbar, dann sind auch Q und R invertierbar und dasselbe gilt für jede weitere solche Zerlegung von A in Q' und R'. Man beachte, dass für Q wie in der Aufgabenstellung aus der Orthonormalität der Basis folgt $Q^T Q = I_n$ und somit ist $Q^{-1} = Q^T$ und folglich ist $QQ^T = I_n$, was wiederum impliziert, dass die Zeilen von Q und die Spalten von Q^T eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bilden. Des Weiteren ist $(Q^T Q')^T Q^T Q' = (Q')^T Q Q^T Q' = I_n$ und folglich sind auch die Zeilen und Spalten von $Q^T Q'$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}$.

Es gilt nun

$$QR = A = Q'R' \Leftrightarrow QR = A \text{ und } R(R')^{-1} = Q^T Q'.$$

Insbesondere erfüllt die obere Dreiecksmatrix $R(R')^{-1}$ die Gleichung $(R(R')^{-1})^{-1} = (R(R')^{-1})^T$. Da aber die Inverse einer oberen Dreiecksmatrix eine obere Dreiecksmatrix ist, erhalten wir, dass $R(R')^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist, deren Spalten wegen $R(R')^{-1} = Q^T Q'$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bilden. Da die Diagonaleinträge eines Produktes von Dreiecksmatrizen die Produkte der entsprechenden Diagonaleinträge sind, besitzt die Diagonalmatrix nur positive Einträge auf der Diagonalen, die folglich alle gleich 1 sind. Somit ist $Q = Q'$ und folglich $R = Q^T Q R' = R'$ wie gewünscht.

Bitte wenden!

c) Wir wenden Gram-Schmidt auf die Spalten von A an und erhalten eine orthogonale Basis (v_1, v_2, v_3). Der Algorithmus liefert

$$\begin{aligned}
v_1 &= A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
v_2 &= A^{(2)} - \frac{\langle v_1, A^{(2)} \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
v_3 &= A^{(3)} - \frac{\langle v_1, A^{(3)} \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v_2, A^{(3)} \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wir setzen rekursiv die Formeln ein und erhalten

$$\begin{aligned}
v_1 &= A^{(1)} \\
v_2 &= -\frac{1}{2} A^{(1)} + A^{(2)} \\
v_3 &= -\frac{1}{3} A^{(1)} - \frac{1}{3} A^{(2)} + A^{(3)}.
\end{aligned}$$

Normierung liefert die ONB (w_1, w_2, w_3) mit $w_i = \frac{1}{\|v_i\|} v_i$ $(i = 1, 2, 3)$, wobei

$$\|v_1\| = \sqrt{2}, \quad \|v_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \|v_3\| = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Gegeben Vektoren $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n \in \mathbb{K}^m$ sei $(\tilde{v}_1 | \cdots | \tilde{v}_n) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ die Matrix, deren j-te Spalte gleich $\tilde{v}_j$ ist. Dann folgt aus obiger Rechnung

$$A \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (v_1 | v_2 | v_3) = (w_1 | w_2 | w_3) \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Mittels Gausselimination berechnet man

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 + \frac{1}{3} Z_3]{Z_1 + \frac{1}{3} Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1 + \frac{1}{2} Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

und es folgt

$$A = (w_1 | w_2 | w_3) \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

5. **a)** Es ist per definitionem $\langle L_A v, w\rangle = \langle Av, w\rangle_{\mathbb{R}^n} = v^T A^T w = w^T Av$, wobei wir hier verwenden, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $a^T = a$. Es folgt die Aussage.

b) Es gilt für beliebige $v \in V$ nach Definition von Φ^*

$$\langle \Phi^*\Phi v, v\rangle_V = \langle \Phi v, \Phi v\rangle_W = \|\Phi v\|^2 \geq 0$$

und $\langle \Phi^*\Phi v, v\rangle_V = 0 \Leftrightarrow v \in \mathrm{Ker}(\Phi)$.

c) Sei $v \in \mathrm{Ker}(\Phi^*\Phi)$, dann ist $0 = \langle \Phi^*\Phi v, u\rangle =\rangle \langle \Phi v, \Phi u\rangle_W$ für alle $u \in V$ und mit $u := v$ folgt aus der Positivität $\Phi v = 0$ bzw. $\mathrm{Ker}(\Phi^*\Phi) \subseteq \mathrm{Ker}(\Phi)$. Die Inklusion $\mathrm{Ker}(\Phi) \subseteq \mathrm{Ker}(\Phi^*\Phi)$ ist klar und folglich ist $\mathrm{Ker}(\Phi^*\Phi) = \mathrm{Ker}(\Phi)$. Es folgt aus der Dimensionsformel, dass

$$\mathrm{Rang}(\Phi^*\Phi) = \dim V - \mathrm{nullity}(\Phi^*\Phi) = \dim V - \mathrm{nullity}(\Phi) = \mathrm{Rang}(\Phi).$$