Serie 19:
Gram-Schmidt Orthogonalisierung, adjungierte Abbildungen

1. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des orthogonalen Komplements:

a) Sei $S \subseteq V$ eine Teilmenge, dann ist $S^\perp$ ein Unterraum.

b) $\{0\}^\perp = V$ und $V^\perp = \{0\}$.

c) Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum, dann gilt $W \cap W^\perp = \{0\}$. Falls V endlichdimensional ist, dann gilt $(W^\perp)^\perp = W$.

d) Sei $S \subseteq V$ eine Teilmenge, dann ist $S^\perp = \big(\mathrm{span}(S)\big)^\perp$.

e) Sei V endlichdimensional und sei $S \subseteq V$ eine Teilmenge, dann gilt $V = S^\perp \oplus \mathrm{span}(S)$.

$^\heartsuit$**2.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und sei U ein Unterraum von V. Für $v \in V$ definieren wir die orthogonale Projektion $P_U(v) \in V$ von v auf U durch

1. $P_U(v) \in U$.
2. $\forall u \in U : \langle v - P_U(v), u \rangle = 0$.

a) Zeigen Sie, dass $P_U(v)$ wohldefiniert ist, d.h. für alle $v \in V$ existiert genau ein Vektor $P_U(v) \in V$, der die beiden Eigenschaften erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $P_U : V \to V$, $v \mapsto P_U(v)$ eine Projektion ist, d.h. $P_U \in \mathrm{End}(V)$ und $P_U^2 = P_U$.

Bitte wenden!

c) Zeigen Sie, dass $\|P_U(v) - v\| = \min\{\|u - v\| \mid u \in U\}$ gilt.

3. Sei $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem standard inneren Produkt und sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ der Unterraum erzeugt durch $v_1 = (1,1,1)^T$ und $v_2 = (-1,1,0)^T$.

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der oben gefundenen Orthonormalbasis die Darstellungsmatrizen $[P_U]_{\mathcal{E}_3}$ und $[P_{U^\perp}]_{\mathcal{E}_3}$.

c) Bestimmen Sie je ein lineares Gleichungssystem mit Lösungsmengen U und $U^\perp$.

4. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

a) Zeigen Sie, dass eine Orthonormalbasis $(v_1, \ldots, v_n)$ von $\mathbb{R}^n$, sowie eine obere Dreiecksmatrix $R \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ existieren, sodass $A = QR$, wobei Q die $n \times n$-Matrix mit Spalten $Q^{(j)} = v_j$ ist.

b) Zeigen Sie, dass für $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ die Zerlegung von A unter der Voraussetzung, dass die Diagonaleinträge von R positiv sind, eindeutig ist.

c) Berechnen Sie eine QR-Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ ein endlichdimensionaler Euklidscher Vektorraum. Ein Endomorphismus $T \in \mathrm{End}(V)$ heisst *positiv semidefinit*, falls für alle $v \in V$ gilt $\langle Tv, v\rangle_V \geq 0$. Falls die Ungleichung für $v \in V \setminus \{0\}$ strikt ist, heisst T *positiv definit*.

Im Folgenden ist $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ ein weiterer Euklidscher Vektorraum und $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

a) Zeigen Sie, dass $L_A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ $(A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}))$ genau dann positiv (semi-)definit ist für das standard innere Produkt, wenn A positiv (semi-)definit ist in folgendem Sinne: $\forall x \in \mathbb{R}^n : x^T A x \geq 0$ (und $x^T A x = 0$ impliziert $x = 0$).

b) Zeigen Sie, dass $\Phi^*\Phi$ positiv semidefinit ist, und zeigen Sie weiter, dass $\Phi^*\Phi$ genau dann positiv definit ist, wenn Φ injektiv ist.

c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Rang}(\Phi) = \mathrm{Rang}(\Phi^*\Phi)$ gilt.

Siehe nächstes Blatt!

6. Online-Abgabe

1. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum, und sei $S \subseteq V$. Dann ist $S^\perp$ ein Unterraum von V.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

2. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. Dann ist W das orthogonale Komplement eines Unterraums von V.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

3. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, sei $S \subseteq V$. Dann ist $(S^\perp)^\perp = \operatorname{span}(S)$.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

4. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, sei $T \in \operatorname{End}(V)$. Dann ist $\operatorname{nullity}(T) + \operatorname{nullity}(I_V - T) = \dim(V)$.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

5. Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ mit $A^4 = 0$. Dann ist 0 der einzige Eigenwert von A.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

Bitte wenden!

6. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, und seien $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subseteq V$ zwei Orthonormalbasen von V. Dann existiert $T \in \mathrm{End}(V)$, sodass $T(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2$.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

7. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Falls $T^*T = 0$ gilt, dann ist $T = 0$.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

8. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Falls $TT^* = 0$ gilt, dann ist $T = 0$.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

9. *Prüfung Sommer 2017:* Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und sei $S \subset V$. Dann ist $(S^\perp)^\perp = S$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

10. *Prüfung Sommer 2017:* Es gibt eine Basis (u_1, u_2) von $\mathbb{R}^2$ mit dem standard inneren Produkt, sodass $\|u_1\| = \|u_2\| = 1$ und $\langle u_1, u_2\rangle = 1$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Siehe nächstes Blatt!

11. *Prüfung Winter 2018:* Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum, und sei T ein Endomorphismus auf V. Dann besitzen T und T^* dieselben Eigenvektoren.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Donnerstag, den 22. März, vor 14:00 Uhr im HG J 68 in einem der Fächer beschriftet mit Abgabe.