Lösung 20:
Selbstadjungierte Abbildungen & 1. Spektralsatz, orthogonale Abbildungen

1. **a)** Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ reell und symmetrisch, d.h. für alle $1 \leq i.j \leq n$ gilt $A_{ij} \in \mathbb{R}$ und $A_{ij} = A_{ji}$. Wir wissen aufgrund der Hauptachsentransformation, dass eine Matrix $Q \in O(n)$ existiert, sodass $Q^T AQ$ eine Diagonalmatrix ist, und da $A, Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \subset M_{n\times n}(\mathbb{C})$ sind alle Einträge dieser Diagonalmatrix reell. Da die Eigenwerte einer Diagonalmatrix genau die Diagonaleinträge dieser Matrix sind, sind alle Eigenwerte von $Q^T AQ$ reell. Die Menge der Eigenwerte ist invariant unter Ähnlichkeit und folglich sind auch alle Eigenwerte von $A = Q(Q^T AQ)Q^T$ reell.

b) Sei A reell, symmetrisch und endlicher Ordnung, d.h. $A^k = I_n$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Aus dem ersten Spektralsatz wissen wir, dass $Q \in \mathrm{O}(n)$ und eine Diagonalmatrix $D \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ existieren, sodass $A = QDQ^T$. Beachte, dass $A^k = QD^kQ^T$ und aus $A^k = I_n$ folgt, dass $D^k = I_n$. Es reicht also zu zeigen, dass jede Diagonalmatrix D endlicher Ordnung die Gleichung $D^2 = I_n$ erfüllt.

Sei also D eine Diagonalmatrix endlicher Ordnung und $D^k = I_n$. Dann gilt insbesondere ${D_{ii}}^k = 1$ und somit $|D_{ii}|^k = 1$. Wir wissen aus der Analysis, dass somit $|D_{ii}| = 1$ und also haben alle Diagonaleinträge von D Absolutbetrag gleich 1. Da die Diagonaleinträge von D alle in $\mathbb{R}$ liegen, folgt $D_{ii} \in \{\pm 1\}$. Somit gilt aber $D^2 = I_n$ und folglich $A^2 = QD^2Q^T = QQ^T = I_n$.

c) Wir zeigen zuerst, dass $\mathrm{SO}(n)$ abgeschlossen ist unter Matrixmultiplikation. Seien $A, B \in \mathrm{SO}(n)$, dann gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1$ und $(AB)^T AB = B^T(A^T A)B^T = B^T I_n B = I_n$. Insbesondere ist also $AB \in \mathrm{O}(n)$ und $\det(AB) = 1$, also ist $\mathrm{SO}(n)$ abgeschlossen unter Matrixmultiplikation.

Die Assoziativität der Verknüpfung folgt aus der Assoziativität der Matrixmultiplikation auf $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Bitte wenden!

Wir zeigen die Existenz des neutralen Elements. Da $\mathrm{O}(n)$ bezüglich Matrixmultiplikation eine Gruppe ist, wissen wir bereits, dass $I_n \in \mathrm{O}(n)$ liegt, und es gilt per definitionem $\det(I_n) = 1$. Insbesondere ist $I_n \in \mathrm{SO}(n)$ ein neutrales Element.

Wir zeigen die Existenz der Inversen. Sei $A \in \mathrm{SO}(n)$, dann wissen wir, dass $A^T A = AA^T = I_n$ gilt. Wir haben letztes Semester gesehen, dass $\det(A^T) = \det(A)$ gilt für alle $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und somit ist $A^T = A^{-1} \in \mathrm{SO}(n)$ für alle $A \in \mathrm{SO}(n)$.

d) Wir überprüfen die drei definierenden Eigenschaften einer Äquivalenzrelation.

Reflexivität: Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dann ist A zu sich selber orthogonal äquivalent, denn es gilt wegen $I_n \in O(n)$, dass $A = Q^T AQ$ für die orthogonale Matrix $Q = I_n$ und folglich ist A orthognal äquivalent zu A. Da A beliebig war, ist die Relation also reflexiv.

Symmetrie: Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Angenommen A ist orthogonal äquivalent zu B und $Q \in O(n)$ eine orthogonale Matrix, sodass $B = Q^T AQ$ gilt. Weil $O(n)$ eine Gruppe ist bezüglich Matrixmultiplikation, ist $K := Q^{-1}$ in $O(n)$ und es gilt $A = K^T BK$. Somit ist B orthogonal äquivalent zu A. Da A, B beliebig waren, folgt die Symmetrie der Relation.

Transitivität: Seien $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Angenommen A ist orthogonal äquivalent zu B und B ist orthogonal äquivalent zu C. Seien $Q_1, Q_2 \in O(n)$ orthogonale Matrizen, sodass $B = Q_1^T AQ_1$ und $C = Q_2^T BQ_2$ gelten. Dann ist insbesondere

$$C = Q_2^T (Q_1^T AQ_1)Q_2 = (Q_1Q_2)^T A(Q_1Q_2)$$

und wegen $Q_1Q_2 \in O(n)$ ist A orthogonal äquivalent zu C. Da A, B, C beliebig waren, folgt die Transitivität der Relation.

2. **a)** Da A positiv definit ist, definiert die Abbildung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \mapsto x^T Ay$ ein inneres Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ auf $\mathbb{R}^n$. Anwendung des Gram-Schmidt Verfahrens auf die Standardbasis $\mathcal{E}_n$ mit anschliessender Normalisierung liefert eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von $\mathbb{R}^n$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Sei $Q := (v_1 \mid \cdots \mid v_n)$, dann gilt per definitionem, dass $Q^T AQ = I_n$. Andererseits ist Q eine obere Dreiecksmatrix, da sie aus Anwendung des Gram-Schmidt Verfahrens auf die Standardbasis entstanden ist. Somit folgt

$$A = (Q^T)^{-1}Q^{-1} = R^T R,$$

wobei $R = Q^{-1}$ eine obere Dreiecksmatrix ist, wie gewünscht.

b) Wir haben in der letzten Serie gesehen, dass $Q \in O(n)$ und eine obere Dreiecksmatrix R mit positiven Diagonaleinträgen existieren, sodass $M = QR$ gilt.

Siehe nächstes Blatt!

Da $1 = \det(M) = \det(Q)\det(R)$ gilt, sind alle Diagonaleinträge von R von 0 verschieden. Sei $\tilde{A}$ die diagonale Matrix gegeben durch

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{cases} R_{ii}^{-1} & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann gilt

$$(\tilde{A}R)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{A}_{ik} R_{ki} = 1$$

und da jede Diagonalmatrix eine obere Dreiecksmatrix ist, ist $N := \tilde{A}R$ also eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen alle gleich 1. Sei $A := \tilde{A}^{-1}$, dann ist also

$$M = QR = Q(A\tilde{A})R = QAN.$$

Wir zeigen nun, dass $\det(Q) = \det(A) = 1$ gilt. Aus $Q \in O(n)$, folgt $1 = \det(Q^T Q) = \det(Q)^2$ und folglich $\det(Q) \in \{\pm 1\}$. Andererseits ist $\det(AN) = \det(R) > 0$ nach Voraussetzung und somit

$$\det(Q) = \det(M)\det(R)^{-1} = \det(R)^{-1} > 0,$$

also $\det(Q) = 1$. Da $\det(N) = 1$, folgt $1 = \det(M) = \det(Q)\det(A)\det(N) = \det(A)$ und weil A insbesondere eine obere Dreiecksmatrix ist, ist $\det(A)$ gleich dem Produkt der Diagonaleinträge. Dies zeigt die Existenz.

Zur Eindeutigkeit: Wir wissen bereits aus der letzten Serie, dass Q eindeutig bestimmt ist, denn AN ist, als Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen, eine obere Dreiecksmatrix. Insbesondere folgt aus $Q_1 A_1 N_1 = Q_2 A_2 N_2$, dass $A_1 N_1 = A_2 N_2$. Nach Voraussetzung ist A_2 invertierbar, und also $N_2 = A_2^{-1} A_1 N_1$. Da A_1, A_2 Diagonalmatrizen sind, folgt

$$(A_2^{-1} A_1)_{ij} = \begin{cases} \frac{(A_1)_{ii}}{(A_2)_{ii}} & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und somit ist

$$(A_2^{-1} A_1 N_1)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} (A_2^{-1} A_{11})_{ik} (N_1)_{ki} = \frac{(A_1)_{ii}}{(A_2)_{ii}} (N_1)_{ii} = \frac{(A_1)_{ii}}{(A_2)_{ii}},$$

da alle Diagonaleinträge von N_1 gleich 1 sind. Es folgt $\frac{(A_1)_{ii}}{(A_2)_{ii}} = (N_2)_{ii} = 1$, da auch die Diagonaleinträge von N_2 gleich 1 sind. Somit ist $(A_1)_{ii} = (A_2)_{ii}$ für alle $1 \leq i \leq n$ und somit $A_1 = A_2$. Daraus folgt sofort $N_1 = N_2$, wegen der Invertierbarkeit von A_1. Somit ist die Zerlegung eindeutig.

Bitte wenden!

c) Wir wenden das Gram-Schmidt Verfahren auf die Spalten von M an und erhalten aus den Spalten $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$ von M eine orthogonale Basis

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \\ v_2 &= M^{(2)} - \underbrace{\frac{\langle M^{(2)}, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}}_{=1} v_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \\ v_3 &= M^{(3)} - \underbrace{\frac{\langle M^{(3)}, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}}_{=-1} v_1 - \underbrace{\frac{\langle M^{(3)}, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}}_{=0} v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tatsächlich ist dies bereits eine Orthonormalbasis und es ist $(v_1 \mid v_2 \mid v_3) \in O(3)$ und nach Einsetzen der erhaltenen Koeffizienten ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & -1 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und da die Dreiecksmatrix von oben Determinante gleich 1 besitzt, muss wegen der Multiplikativität der Determinante $(v_1 \mid v_2 \mid v_3) \in SO(3)$ gelten und wir haben die Iwasawa Zerlegung von M gefunden, wobei in diesem Falle $A = I_3$ ist.

3. a) Sei P die orthogonale Projektion von V auf W. Dann gilt für alle $v, w \in V$, dass

$$\begin{aligned} \langle Pv, w\rangle &= \underbrace{\langle Pv, w - Pw\rangle}_{=0} + \langle Pv, Pw\rangle = \langle Pv, Pw\rangle \\ &= -\underbrace{\langle v - Pv, Pw\rangle}_{=0} + \langle v, Pw\rangle = \langle v, Pw\rangle, \end{aligned}$$

da nach Definition der orthogonalen Projektion $v - Pv$ und $w - Pw$ in $W^\perp$ liegen. Somit ist P in diesem Fall selbstadjungiert.

Sei nun also P eine Projektion von V auf W und sei P selbstadjungiert. Per definitionem ist $Pv \in W$ für alle $v \in V$ und $P^2 = P$. Es reicht also zu zeigen (vgl. Serie 5), dass für alle $v \in V$ gilt

$$\forall w \in W : \langle v - Pv, w\rangle = 0.$$

Da jedes $w \in W$ in $W = \mathrm{Im}(P)$ enthalten ist, ist $w = Pv'$ für ein $v' \in V$ und es gilt $Pw = P^2 v' = Pv' = w$. Zusammen mit der Selbstadjungiertheit von P folgt

$$\langle v - Pv, w\rangle = \langle v, w\rangle - \langle Pv, w\rangle = \langle v, Pw\rangle - \langle v, Pw\rangle = 0.$$

Siehe nächstes Blatt!

Somit erfüllt P die definierenden Eingenschaften der orthogonalen Projektion und wie in Serie 5 diskutiert, ist diese durch die beiden Eigenschaften eindeutig bestimmt.

b) Sei $i^* : V \to W$ die adjungierte Abbildung zu i, dann gilt für alle $v \in V$ und $w \in W$

$$\langle w, v\rangle_V = \langle iw, v\rangle_V = \langle w, i^* v\rangle_W,$$

wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ das innere Produkt auf V und $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ das induzierte innere Produkt auf W sei. Insbesondere erfüllt die Abbildung i^*, dass für alle $v \in V$ gilt

$$\langle v - i(i^* v), w\rangle_V = \langle v - i^* v, w\rangle_V = 0 \quad \text{für alle } w \in W.$$

Andererseits gilt per definitionem $i^* v \in W$. Also ist $i(i^* v) = P_W v$, wobei P_W die orthogonale Projektion von V nach W ist. Das heisst, i^* bildet v auf das Bild von v unter der orthogonalen Projektion auf W ab (interpretiert als Vektor in W), und somit ist die adjungierte Abbildung genau die orthogonale Projektion mit Bild in W.

Bemerkung: Man beachte den folgenden Unterschied: $i^* \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $P_W \in \mathrm{End}(V)$, sodass $i^* \neq P_W$ gelten muss (ausser $W = V$).

4. **a)** Wir berechnen für beliebige $f, g \in V$ mittels partieller Integration und unter Verwendung der Tatsache, dass für alle $f \in V$ gilt $f(2\pi) = f(0)$, dass

$$\begin{aligned}
\langle Df, g\rangle =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) g(x)\mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{2\pi}\left\{\Big[f(x)g(x)\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f(x)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)\mathrm{d}x\right\} \\
=& \langle f, (-D)g\rangle.
\end{aligned}$$

Somit existiert eine zu D adjungierte Abbildung D^* (bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$) und es ist $D^* = -D$. Da $-Df = Df$ genau dann gilt, wenn $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist insbesondere D nicht selbstadjungiert, weil besipielsweise $x \mapsto \sin(x) \in V$ ist, aber $\frac{\mathrm{d}\sin}{\mathrm{d}x}(x) = \cos(x)$ nicht überall verschwindet.

b) Es gilt für beliebige $f, g \in V$, dass

$$\langle \Delta f, g\rangle = \langle (-D)Df, g\rangle = \langle D^* Df, g\rangle = \langle Df, Dg\rangle = \langle f, D^* Dg\rangle = \langle f, \Delta g\rangle$$

und somit existiert eine adjungierte Abbildung $\Delta^*(= \Delta)$ von Δ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und insbesondere ist Δ selbstadjungiert.

Bitte wenden!

c) Wir bemerken zuerst, dass die erzeugenden Elemente Eigenvektoren sind, ausgenommen das Element $x \mapsto \sin(nx)$ mit $n = 0$, denn in diesem Falle resultiert die Nullabbildung. Für beliebige $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned}\Delta(\sin nx) =& (-D)(D\sin nx) = (-D)(n\cos nx) = n(-D\cos nx) = n^2 \sin nx\\ \Delta(\cos nx) =& (-D)(D\cos nx) = (-D)(-n\sin nx) = n(D\sin nx) = n^2 \cos nx\end{aligned}$$

und für $n = 0$ ist $\Delta(\cos nx) = \Delta(1) = 0$. Man beachte zudem, dass wegen $\sin(-nx) = -\sin(nx)$ und $\cos(-nx) = \cos(nx)$ der Unterraum U von den Funktionen $\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\{c_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ erzeugt wird, wobei

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} : \ s_n(x) := \sin(nx) \text{ und } c_n(x) := \cos(nx)$$

und $c_0(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ sei.

Es reicht also zu zeigen, dass diese Eigenfunktionen zueinander orthogonal sind. Dann besitzt U ein orthogonales Erzeugendensystem bestehend aus Eigenfunktionen von Δ und nach Normalisierung folgt dann die Behauptung.

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$, dann gelten

$$\langle s_n, s_m \rangle = \frac{1}{n^2}\langle \Delta s_n, s_m \rangle = \frac{1}{n^2}\langle s_n, \Delta s_m \rangle = \frac{m^2}{n^2}\langle s_n, s_m \rangle$$

und analog $\langle s_n, c_m \rangle = \frac{m^2}{n^2}\langle s_n, c_m \rangle$ sowie $\langle c_n, c_m \rangle = \frac{m^2}{n^2}\langle c_n, c_m \rangle$ (mit $m \in \mathbb{N}_0$). Somit gilt für $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$ mit $n \neq m$, dass

$$0 = \langle s_n, s_m \rangle = \langle s_n, c_m \rangle = \langle c_n, c_m \rangle,$$

wie gewünscht.

5. a) Sei $m = \dim(W_2)$ und $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ eine geordnete Basen von W. Sei $A = [T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}_n}$. Im Folgenden ist $\|A\|_\infty := \max\{|A_{ij}| \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$. Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $v = \sum_{i=1}^n \alpha_j e_j$ und $w = \sum_{i=1}^n \beta_j e_j$, dann ist

$$\begin{aligned}\|T(v) - T(w)\|_W =& \Big\| T\Big(\sum_{j=1}^n (\alpha_j - \beta_j)e_j\Big)\Big\|_W\\ =& \Big\| \sum_{j=1}^n (\alpha_j - \beta_j)T(e_j)\Big\|_W\\ =& \Big\| \sum_{i=1}^m \Big(\sum_{j=1}^n A_{ij}(\alpha_j - \beta_j)\Big)w_i\Big\|_W\\ =& \sum_{i=1}^n \Big\| \Big(\sum_{j=1}^n A_{ij}(\alpha_j - \beta_j)\Big)w_i\Big\|_W\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^{m} \Big| \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(\alpha_j - \beta_j) \Big| \|w_i\|_W \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \|A\|_\infty \|v - w\|_\infty \|w_i\|_W \\
&\leq n \sum_{i=1}^{n} \|A\|_\infty \|v - w\|_\infty \|w_i\|_W \\
&= nm \max\{\|w_i\|_W \mid 1 \leq i \leq m\} \|A\|_\infty \|v - w\|_\infty .
\end{aligned}$$

Da alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind und alle die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$ induzieren, ist T insbesondere Lipschitz-stetig.

Betrachte nun die Abbildung $T : \mathbb{R}^m \to W$, welche die Standardbasis $\mathcal{E}_m$ von $\mathbb{R}^m$ mit $\mathcal{C}$ identifiziert, d.h. T ist die eindeutige lineare Erweiterung von $T : \mathcal{E}_m \to \mathcal{C}$, $T(e_i) := w_i$. Dann ist T ein Isomorphismus und folglich definiert $\|\cdot\|_T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\|v\|_T := \|Tv\|_W$ eine Norm auf $\mathbb{R}^m$, denn es gelten:

$$\begin{aligned}
\forall v \in \mathbb{R}^m : &\|v\|_T = \|Tv\|_W \geq 0 \\
\forall v \in \mathbb{R}^m : &\|v\|_T = 0 \Leftrightarrow \|Tv\|_W = 0 \Leftrightarrow Tv = 0 \Leftrightarrow v = 0 \\
\forall v \in \mathbb{R}^m \forall \lambda \in \mathbb{R} : &\|\lambda v\|_T = \|T(\lambda v)\|_W = \|\lambda T v\|_W = |\lambda| \|Tv\|_W = |\lambda| \|v\|_T \\
\forall v, w \in \mathbb{R}^m : &\|v + w\|_T = \|T(v + w)\|_W = \|Tv + Tw\|_W \\
&\leq \|Tv\|_W + \|Tw\|_W = \|v\|_T + \|w\|_T .
\end{aligned}$$

Da alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind, sind der durch $\|\cdot\|_T$ definierte Einheitsball in $\mathbb{R}^m$ sowie die Einheitssphäre kompakt, und somit sind sind $\overline{B_1}$, $S(W)$ kompakt, denn

$$\begin{aligned}
\overline{B_1} =&\{w \in W \mid \|w\|_W \leq 1\} = T\big(\{v \in \mathbb{R}^m \mid \|v\|_T \leq 1\}\big) \\
S(W) =&\{w \in W \mid \|w\|_W = 1\} = T\big(\{v \in \mathbb{R}^m \mid \|v\|_T = 1\}\big)
\end{aligned}$$

sind die Bilder kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen.

b) Sei $T : W \to V$ eine lineare Abbildung zwischen zwei endlichdimensionalen, normierten Vektorräumen und angenommen die Abbildung ist nicht stetig, d.h. es gibt ein $v \in W$ und ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $\delta > 0$ ein $w_\delta \in W$ existiert für welches gelten

$$\|v - w_\delta\|_W < \delta \text{ und } \|Tv - Tw_\delta\|_V \geq \varepsilon .$$

Sei $\Phi : \mathbb{R}^m \to W$ ein Isomorphismus. Wir konstruieren eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^m \to V$, die an der Stelle $\Phi^{-1}v$ nicht stetig ist.

Wegen der Äquivalenz von Normen auf $\mathbb{R}^m$ ist Φ stetig bezüglich der auf $\mathbb{R}^m$ induzierten Norm $\|\cdot\|_\Phi$ von oben und ebenso ist die Abbildung $T_\Phi := T \circ \Phi$:

$\mathbb{R}^m \to V$ stetig. Andererseits gelten für beliebige $\delta > 0$, dass

$$\|\Phi^{-1}v - \Phi^{-1}w_\delta\|_\Phi = \|\Phi(\Phi^{-1}v - \Phi^{-1}w_\delta)\|_W = \|v - w_\delta\|_W < \delta$$

sowie

$$\|T_\Phi\Phi^{-1}v - T_\Phi\Phi^{-1}w_\delta\|_V = \|Tv - Tw_\delta\|_V \geq \varepsilon.$$

Wir haben also gezeigt, dass für alle $\delta > 0$ ein $w'_\delta \in \mathbb{R}^m$ existiert, so dass für $v' := \Phi^{-1}v$ gelten

$$\|v' - w'_\delta\|_\Phi < \delta \text{ und } \|T_\Phi v' - T_\Phi w'_\delta\|_V \geq \varepsilon.$$

Also ist T_Φ nicht stetig, im Widerspruch zu Teilaufgabe (a).

Bemerkung: Ein Korollar hiervon ist, dass jeder normierte, endlichdimensionale Vektorraum $(W, \|\cdot\|)$ für ein $m \in \mathbb{N}$ homöomorph ist zu $\mathbb{R}^m$ versehen mit der Topologie induziert durch eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^m$.

c) Aus obigem folgt, dass die Abbildung $v \mapsto \langle Tv, v\rangle$ stetig ist, denn für $v, w \in V$ gilt wegen Cauchy-Schwarz

$$|\langle Tv, v\rangle - \langle Tw, w\rangle| \leq \|Tv\|\|v - w\| + \|Tv - Tw\|\|w\|.$$

Sei also $v \in V$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach dem, was soeben gezeigt wurde, ein $\delta \in (0, 1)$, sodass $\|Tv - Tw\| < \frac{\varepsilon}{2(\|v\|+1)}$, wann immer $\|v - w\| < \delta$.Sei δ zusätzlich noch so gewählt, dass $\|Tv\|\delta < \frac{\varepsilon}{2}$, dann folgt für alle $w \in V$ mit $\|v - w\| < \delta$, dass

$$\begin{aligned}
|\langle Tv, v\rangle - \langle Tw, w\rangle| \leq &\|Tv\|\|v - w\| + \|Tv - Tw\|\|w\| \\
< &\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(\|v\| + 1)}\|w\| \\
< &\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon(\|v\| + 1)}{2(\|v\| + 1)} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Somit folgt die Stetigkeit an der Stelle v und weil v beliebig war, die Stetigkeit.

Da wegen dem Satz von Heine-Borel die Menge $\overline{B_1} := \{v \in V \mid \|v\| \leq 1\}$ kompakt ist, nimmt die Abbildung $v \mapsto \langle Tv, v\rangle$ auf $\overline{B_1}$ ihr Supremum an.

Um die letzte Aussage zu beweisen, bemerken wir zuerst, dass sie für $v = 0$ sicher erfüllt ist. Sei also $v \neq 0$ und sei $\delta := \|v\|$, dann ist

$$\langle Tv, v\rangle = \delta^2\langle T(\delta^{-1}v), \delta^{-1}v\rangle \leq \delta^2\alpha = \alpha\|v\|^2.$$

d) Sei $v \in V \setminus \{0\}$ und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann ist

$$\frac{\|T(\lambda v)\|}{\|\lambda v\|} = \frac{\lambda\|T\|}{\lambda\|v\|} = \frac{\|Tv\|}{\|v\|}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Insbesondere ist die Abbildung $v \mapsto \frac{\|Tv\|}{\|v\|}$ konstant auf Geraden durch den Ursprung und Ihr Bild ist genau das Bild Ihrer Restriktion auf die Einheitssphäre $S(V) = \{v \in V \mid \|v\| = 1\}$. Da V endlichdimensional ist, ist $S(V)$ wegen dem Satz von Heine-Borel kompakt. Um zu zeigen, dass die Abbildung ihr Infimum annimmt, reicht es also zu zeigen, dass ihre Restriktion auf die Einheitssphäre stetig ist.

Auf der Einheitssphäre stimmt die Abbildung allerdings mit der Abbildung $v \mapsto \|Tv\|$ überein, und letztere besitzt, wegen der umgekehrten Dreiecksungleichung und der Stetigkeit von T aus der ersten Teilaufgabe eine stetige Erweiterung auf ganz V. Es ist nämlich

$$\big|\|Tv\| - \|Tw\|\big| \leq \|Tv - Tw\| \leq n\|A\|_\infty \|v - w\|.$$

Also nimmt sie ihr Maximum an und es existiert ein $v \in S(V) \subset V$, sodass gilt

$$\|Tv\| = \max\{\|Tw\| \mid w \in S(V)\} = \sup\left\{\tfrac{\|Tw\|}{\|w\|} \mid w \in V \setminus \{0\}\right\}.$$

Wir beweisen nun $\alpha = \|T\|$. Wegen der Cauchy-Schwarz Ungleichung ist

$$\langle Tv, v\rangle \leq \|Tv\|\|v\| \leq \|T\|,$$

wann immer $\|v\| \leq 1$, und es folgt $\alpha \leq \|T\|$. Für die umgekehrte Ungleichung müssen wir ein wenig arbeiten. Wir berechnen unter Verwendung der Selbstadjungiertheit von T, dass gilt

$$\begin{aligned}
\langle T(\lambda v + \lambda^{-1}Tv), \lambda v + \lambda^{-1}Tv\rangle =& \lambda^2\langle Tv, v\rangle + 2\|Tv\|^2 + \lambda^{-2}\langle T^2v, Tv\rangle \\
\langle T(\lambda v - \lambda^{-1}Tv), \lambda v - \lambda^{-1}Tv\rangle =& \lambda^2\langle Tv, v\rangle - 2\|Tv\|^2 + \lambda^{-2}\langle T^2v, Tv\rangle
\end{aligned}$$

und Subtraktion der beiden Ausdrücke liefert

$$4\|Tv\|^2 \leq \langle T(\lambda v + \lambda^{-1}Tv), \lambda v + \lambda^{-1}Tv\rangle - \langle T(\lambda v - \lambda^{-1}Tv), \lambda v - \lambda^{-1}Tv\rangle.$$

Wir wenden die Aussage aus der ersten Teilaufgabe auf die beiden Ausdrücke an und erhalten

$$4\|Tv\|^2 \leq \alpha\|\lambda v + \lambda^{-1}Tv\|^2 + \alpha\|\lambda v - \lambda^{-1}Tv\|^2.$$

Aus der Parallelogrammgleichung folgt nun

$$4\|Tv\|^2 \leq 2\alpha\lambda^2\|v\|^2 + 2\alpha\lambda^{-2}\|Tv\|^2.$$

Falls $Tv \neq 0$ gilt, dann setzen wir $\lambda = \frac{\|Tv\|}{\|v\|}$ und es folgt

$$4\|Tv\|^2 \leq 2\alpha\|Tv\|\|v\| + 2\alpha\|Tv\|\|v\|.$$

Bitte wenden!

Insbesondere $\|Tv\| \leq \alpha\|v\|$. Diese Ungleichung ist sicher erfüllt, wenn $Tv = 0$, und somit haben wir gezeigt, dass

$$\forall v \in V \setminus \{0\} : \frac{\|Tv\|}{\|v\|} \leq \alpha.$$

Es folgt $\alpha = \|T\|$.

e) Sei $\alpha := \sup\{\langle Tv, v\rangle \mid v \in \overline{B_1}\}$ und sei $v \in \overline{B_1}$, sodass $\langle Tv, v\rangle = \alpha$ gilt. Man beachte, dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, dass $\|v\| = 1$ gilt, denn für alle $\lambda > 1$ gilt $\|T(\lambda v)\| = \lambda\|Tv\| \geq \|Tv\|$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} 0 \leq &\|Tv - \alpha v\|^2 = \|Tv\|^2 - 2\alpha\langle Tv, v\rangle + \alpha^2 \\ = &\|Tv\|^2 - \alpha^2 \leq \|T\|^2 - \alpha^2 = 0. \end{aligned}$$

Es folgt $Tv = \alpha v$ und somit ist v ein Eigenvektor von T.