Lösung 21:
Bilinearformen

1. **a)** 1. Seien $u_1, u_2 \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gelten nach Voraussetzung:

$$\begin{aligned} L_v(u_1 + \lambda u_2) =& \beta(v, u_1 + \lambda u_2) = \beta(v, u_1) + \beta(v, \lambda u_2) \\ =& \beta(v, u_1) + \lambda\beta(v, u_2) = L_v(u_1) + \lambda L_v(u_2), \\ R_v(u_1 + \lambda u_2) =& \beta(u_1 + \lambda u_2, v) = \beta(u_1, v) + \beta(\lambda u_2, v) \\ =& \beta(u_1, v) + \lambda\beta(u_2, v) = R_v(u_1) + \lambda R_v(u_2). \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass eine Abbildung $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ genau dann bilinear ist, wenn für alle $v \in V$ die zu β assoziierten Abbildungen $L_v, R_v : V \to \mathbb{K}$ linear sind. Im Folgenden bezeichnen wir mit *Linearität von β im ersten Argument* die Linearität von R_v für alle $v \in V$ und mit *Linearität von β im zweiten Argument* die Linearität von L_v für alle $v \in V$.

2. Da für alle $u \in U$ die zu β assoziierten Abbildungen $L_u, R_u : V \to \mathbb{K}$ – wie gerade gezeigt wurde – linear sind, gelten

$$\beta(u, 0) = L_u(0) = 0 \text{ und } \beta(0, u) = R_u(0) = 0.$$

3. Wegen Linearität im ersten Argument ist

$$\beta(u + v, w + z) = \beta(u, w + z) + \beta(v, w + z).$$

Wegen Linearität im zweiten Argument sind

$$\beta(u, w + z) = \beta(u, w) + \beta(u, z) \text{ und } \beta(v, w + z) = \beta(v, w) + \beta(v, w).$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \beta(u + v, w + z) =& \beta(u, w + z) + \beta(v, w + z) \\ =& \beta(u, w) + \beta(u, z) + \beta(v, w) + \beta(v, w). \end{aligned}$$

4. Sei $v \in V$ beliebig, und seien $L_{\alpha,v}, R_{\alpha,v} : V \to \mathbb{K}$ sowie $L_{\beta,v}, R_{\beta,v} : V \to \mathbb{K}$ die mit α bzw. mit β assoziierten Abbildungen aus Teil 1. Dann gelten für $u \in V$

$$\begin{aligned} L_{\alpha,v}(u) =& \alpha(v,u) = \beta(u,v) = R_{\beta,v}(u), \\ R_{\alpha,v}(u) =& \alpha(u,v) = \beta(v,u) = L_{\beta,v}(u), \end{aligned}$$

und wegen der Bilinearität von β folgt die Linearität von $L_{\alpha,v}, R_{\alpha,v}$ für beliebige $v \in V$. Wie in Teil 1 besprochen, ist α also bilinear.

b) Da $\beta(0,w)$ für alle $w \in V$ gilt, ist sicher $0 \in S^\beta$. Seien $v_1, v_2 \in S^\beta$ und sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $w \in S$

$$\beta(v_1 + av_2, w) = \beta(v_1, w) + a\beta(v_2, w) = 0,$$

und somit ist S^β ein Unterraum von V.

c) Seien $\beta_1, \beta_2 \in \mathrm{BF}(V)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann ist

$$\psi_{\mathcal{B}}(\beta_1 + \lambda\beta_2)_{ij} = \beta_1(v_i, v_j) + \lambda\beta_2(v_i, v_j) = \psi_{\mathcal{B}}(\beta_1)_{ij} + \lambda\psi_{\mathcal{B}}(\beta_2)_{ij}$$

nach Definition der Vektorraumstruktur auf $\mathrm{BF}(V) \subseteq \mathrm{Abb}(V \times V, \mathbb{K})$, und wir erhalten

$$\psi_{\mathcal{B}}(\beta_1 + \lambda\beta_2) = \psi_{\mathcal{B}}(\beta_1) + \lambda\psi_{\mathcal{B}}(\beta_2),$$

da die Vektorraumstruktur auf $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ mittels komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation definiert ist.

d) **Reflexivität:** Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Wegen $I_n = I_n^T$ gilt $I_n^T A I_n = A$ und somit ist A kongruent zu sich selber.

Symmetrie: Sei $Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$, dann ist wie in der Linearen Algebra I besprochen wurde auch $Q^T \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ und es gilt $(Q^T)^{-1} = (Q^{-1})^T$. Seien nun $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und sei $Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$, sodass $B = Q^T A Q$. Sei $R := Q^{-1}$, dann folgt aus vorangehenden Ausführungen, dass

$$R^T B R = (R^T Q^T) A (QR) = A$$

und folglich impliziert die Kongruenz von A zu B die Kongruenz von B zu A.

Transitivität: Seien $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und $Q, R \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$, sodass $B = Q^T A Q$ und $C = R^T B R$ gelten. Dann ist

$$C = R^T B R = R^T Q^T A Q R = (QR)^T A (QR)$$

und weil $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ abgeschlossen ist unter Matrixmultiplikation, folgt aus der Kongruenz von A zu B und der Kongruenz von B zu C die Kongruenz von A zu C.

Siehe nächstes Blatt!

2. Wegen der Linearität der Spur ist für alle $A_1, A_2, A, B_1, B_2, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A_1+\lambda A_2)\operatorname{tr}(B) =&\big(\operatorname{tr}(A_1)+\lambda\operatorname{tr}(A_2)\big)\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(A_1)\operatorname{tr}(B)+\lambda\operatorname{tr}(A_2)\operatorname{tr}(B)\\ \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B_1+\lambda B_2) =&\operatorname{tr}(A)\big(\operatorname{tr}(B_1)+\lambda\operatorname{tr}(B_2)\big) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B_1)+\lambda\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B_2)\end{aligned}$$

und somit ist die Abbildung bilinear. Schreibe $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, dann ist $\operatorname{tr}(v_i) = 1$ falls $i = 1$ oder $i = 4$ und 0 sonst. Daher gilt

$$[\beta]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

3. **a)** Nach Definition der Vektorraumstruktur auf V^* gilt für alle $f_1, f_2 \in V^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$ sowie $v \in V$, dass

$$(f_1+\lambda f_2)(v) = f_1(v)+\lambda f_2(v)$$

und somit haben wir Linearität im ersten Argument.

Da jedes $f \in V^*$ per definitionem linear ist, gilt für alle $v_1, v_2 \in V$ sowie $\lambda \in \mathbb{K}$, dass

$$f(v_1+\lambda v_2) = f(v_1)+\lambda f(v_2)$$

und es gilt Linearität im zweiten Argument.

b) Wir zeigen, dass die Menge der bilinearen Abbildungen $V \times W \to \mathbb{K}$ ein Unterraum von $\operatorname{Abb}(V\times W, \mathbb{K})$ ist.

Die Nullabbildung gegeben durch $(v, w) \mapsto 0 \in \mathbb{K}$ für alle $v \in V$ und $w \in W$ ist sicherlich eine bilineare Abbildung und somit ist die Menge der bilinearen Abbildungen nicht-leer.

Seien $\beta_1, \beta_2 : V \times W \to \mathbb{K}$ bilinear und sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Seien $v_1, v_2, v \in V$, $w_1, w_2, w \in W$ sowie $\mu \in \mathbb{K}$ beliebig, dann gelten nach Definition der Vektorraumstruktur auf $\operatorname{Abb}(V \times W, \mathbb{K})$ sowie der Bilinearität von β_1 und β_2

$$\begin{aligned}(\beta_1+\lambda\beta_2)(v_1+\mu v_2, w) =&\beta_1(v_1+\mu v_2, w)+\lambda\beta_2(v_1+\mu v_2, w)\\ =&\beta_1(v_1)+\mu\beta_1(v_1, w)+\lambda\beta_2(v_1, w)+\mu\lambda\beta_2(v_2, w)\\ =&\big(\beta_1(v_1, w)+\lambda\beta_2(v_1, w)\big)+\mu\big(\beta_1(v_2, w)+\lambda\beta_2(v_2, w)\big)\\ =&(\beta_1+\lambda\beta_2)(v_1, w)+\mu(\beta_1+\lambda\beta_2)(v_2, w)\end{aligned}$$

und somit ist $\beta_1+\lambda\beta_2$ linear im ersten Argument. Analog erhält man

$$\begin{aligned}(\beta_1+\lambda\beta_2)(v, w_1+\mu w_2) =&\beta_1(v, w_1+\mu w_2)+\lambda\beta_2(v, w_1+\mu w_2)\\ =&\beta_1(v, w_1)+\mu\beta_1(v, w_1)+\lambda\beta_2(v, w_1)+\mu\lambda\beta_2(v, w_2)\end{aligned}$$

Bitte wenden!

$$
\begin{aligned}
&= \big(\beta_1(v,w_1) + \lambda\beta_2(v,w_1)\big) + \mu\big(\beta_1(v,w_2) + \lambda\beta_2(v,w_2)\big)\\
&= (\beta_1 + \lambda\beta_2)(v,w_1) + \mu(\beta_1 + \lambda\beta_2)(v,w_2)
\end{aligned}
$$

und $\beta_1 + \lambda\beta_2$ ist linear im zweiten Argument. Insbesondere ist also $\beta_1 + \lambda\beta_2$ bilinear.

c) **“⇒”:** Falls $V \cong W$ gilt, dann ist $\dim(V) = \dim(W)$. Sei also $(v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V, sei $(w_1, \ldots, w_n)$ eine geordnete Basis von W und sei $(f_1, \ldots, f_n)$ die assoziierte duale Basis von W^*, d.h. $f_i(w_j) = \delta_{i,j}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Sei $\Phi : V \to W^*$ der eindeutige Isomorphismus mit $\Phi(v_i) = f_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Die Abbildung $(v, w) \mapsto \Phi(v)(w)$ ist nach Teilaufgabe a) bilinear. Wir zeigen, dass sie nicht-ausgeartet ist. Sei $v \neq 0$ und sei $\Phi(v) = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$. Da $v \neq 0$ und Φ ein Isomorphismus (insbesondere also injektiv) ist, existiert ein $1 \leq i \leq n$, sodass $a_i \neq 0$ ist. Es ist $\Phi(v)(w_i) = a_i \neq 0$. Sei andererseits $w \in W \setminus \{0\}$ und sei $w = b_1 w_1 + \cdots + b_n w_n$. Da $w \neq 0$, existiert ein $1 \leq i \leq n$, sodass $b_i \neq 0$ gilt. Es ist $\Phi\big(\Phi^{-1}(f_i)\big)(w) = f_i(w) = b_i \neq 0$. Also ist die Bilinearform nicht-ausgeartet und die gewünschte Implikation ist bewiesen.

“⇐”: Angenommen $\beta : V \times W \to \mathbb{K}$ ist eine nicht-ausgeartete Bilinearform. Für jedes $v \in V$ definiert, unter Verwendung der Linearität von β im zweiten Argument, die Abbildung $\beta_v : W \to \mathbb{K}$, $w \mapsto \beta(v, w)$, ein Element in W^*. Da β nicht-ausgeartet ist, ist β_v für alle $v \in V \setminus \{0\}$ nicht das Nullelement in W^*. Andererseits gilt unter Verwendung der Linearität von β im ersten Argument für $v_1, v_2 \in V$, $w \in W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\beta_{v_1 + \lambda v_2}(w) = \beta_{v_1}(w) + \lambda\beta_{v_2}(w)$$

und somit ist die Abbildung $V \to W^*$, $v \mapsto \beta_v$, linear und weil $\beta_v = 0$ genau dann gilt, wenn $v = 0$ ist, auch injektiv. Da jede injektive lineare Abbildung zwischen zwei endlichdimensionalen Vektorräumen linear unabhängige Mengen auf linear unabhängige Mengen abbildet, folgt $\dim(V) \leq \dim(W^*) = \dim(W)$. Analog zeigt man $\dim(W) \leq \dim(V)$ und es folgt $\dim(V) = \dim(W)$ und somit die gewünschte Isomorphie.

4. **a)** **“⇒”:** Sei ω antisymmetrisch. Dann gilt $\omega(u, u) = -\omega(u, u)$ und folglich $2\omega(u, u) = 0$ für alle $u \in V$. Da $2 \neq 0$ gilt in $\mathbb{K}$ folgt also $\omega(u, u) = 0$ für alle $u \in V$.

“⇐”: Es gelte $\omega(u, u) = 0$ für alle $u \in V$. Seien $u, v \in V$ beliebig, dann folgt aus der Bilinearität von ω, dass

$$
\begin{aligned}
0 &= \omega(u+v, u+v)\\
&= \underbrace{\omega(u,u)}_{=0} + \omega(u,v) + \omega(v,u) + \underbrace{\omega(v,v)}_{=0}
\end{aligned}
$$

und somit $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$.

Siehe nächstes Blatt!

b) Da ω antisymmetrisch ist, ist jede Darstellungsmatrix von ω antisymmetrisch. Da ω nicht-ausgeartet ist, ist jede Darstellungsmatrix von ω invertierbar. Sei A eine Darstellungsmatrix von ω, dann gilt also

$$0 \neq \det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^{\dim(V)} \det(A),$$

und somit $\dim(V)$ gerade (da $2 \neq 0$). Es bleibt zu zeigen, dass jede Darstellungsmatrix von ω antisymmetrisch und invertierbar ist.

Im Folgenden sei $n = \dim(V)$ und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine beliebige Basis von V. Es gilt wie in der Vorlesung besprochen für alle $u, v \in V$

$$\omega(u, v) = [u]_\mathcal{B}[\omega]_\mathcal{B}[v]_\mathcal{B}.$$

Somit ist insbesondere

$$\begin{aligned}([\omega]_\mathcal{B})_{ij} &= e_i^T[\omega]_\mathcal{B}e_j = [v_i]_\mathcal{B}^T[\omega]_\mathcal{B}[v_j]_\mathcal{B} = \omega(v_i, v_j)\\ &= -\omega(v_j, v_i) = -[v_j]_\mathcal{B}^T[\omega]_\mathcal{B}[v_i]_\mathcal{B}\\ &= -e_j^T[\omega]_\mathcal{B}e_i = -([\omega]_\mathcal{B})_{ji}\end{aligned}$$

und somit ist $[\omega]_\mathcal{B}$ antisymmetrisch.

Um zu zeigen, dass $[\omega]_\mathcal{B}$ invertierbar ist, reicht es zu zeigen, dass $L_{[\omega]_\mathcal{B}}$ injektiv ist. Sei $\tilde{u} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ und sei $u \in V$, sodass $[u]_\mathcal{B} = \tilde{u}$. Da ω nicht-ausgeartet ist, existiert ein $v \in V$, sodass $\omega(v, u) \neq 0$ gilt. Es folgt

$$0 \neq \omega(v, u) = [v]_\mathcal{B}^T[\omega]_\mathcal{B}\tilde{u},$$

und somit ist $[\omega]_\mathcal{B}\tilde{u} \neq 0$. Da $\tilde{u} \in \mathbb{K}^n$ beliebig war, folgt $\operatorname{Ker}(L_{[\omega]_\mathcal{B}}) = \{0\}$ und somit ist $L_{[\omega]_\mathcal{B}}$ injektiv, also invertierbar, und somit auch $[\omega]_\mathcal{B}$ invertierbar.

Im Folgenden geben wir einen weiteren Beweis, der nicht die Darstellungsmatrix, sondern eine Art Zerlegung in orthogonale Unterräume verwendet, und der analog für alle nicht-ausgearteten Bilinearformen relevant ist. Wenn $\dim(V) = 0$ ist, dann ist jede bilineare Abbildung $V \times V \to \mathbb{K}$ antisymmetrisch und nicht-ausgeartet. Im folgenden sei also $\dim(V) > 0$. Wir konstruieren Unterräume W, W' von V, sodass $\dim(W) = 2$ sowie $V = W \oplus W'$ gelten, und sodass $\omega|_{W'}$ eine antisymmetrisch, nicht-ausgeartete Bilinearform ist. Dann folgt die Aussage mittels Induktion.

Sei $u \in V \setminus \{0\}$ beliebig und sei $v \in V$, sodass $\omega(u, v) \neq 0$. Da ω bilinear und antisymmetrisch ist, folgt $v \neq \lambda u$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und somit ist $\langle u, v\rangle \subseteq V$ ein zweidimensionaler Unterraum (und somit auch $\dim(V) > 1$ – diese Schlussfolgerung ist *falsch*, falls $2 = 0$). Wir definieren

$$\langle u, v\rangle^\omega = \{w \in V \mid \omega(u, w) = \omega(v, w) = 0\}.$$

Bitte wenden!

Wir behaupten, dass $\langle u,v\rangle^\omega$ ein Unterraum ist, dass $V = \langle u,v\rangle \oplus \langle u,v\rangle^\omega$ gilt und dass die Einschränkung von ω auf $\langle u,v\rangle^\omega$ eine antisymmetrische, nicht-ausgeartete Bilinearform ist.

Um zu sehen, dass $\langle u,v\rangle^\omega$ ein Unterraum ist, verwenden wir die Notation aus Aufgabe 3. und sehen, dass $\langle u,v\rangle^\omega = \operatorname{Ker}(\omega_u) \cap \operatorname{Ker}(\omega_v)$ gilt, und somit ist $\langle u,v\rangle^\omega$ der Schnitt zweier Unterräume von V und damit ein Unterraum.

Wir zeigen, dass $\langle u,v\rangle \cap \langle u,v\rangle^\omega = \{0\}$ gilt. Sei $w \in \langle u,v\rangle \cap \langle u,v\rangle^\omega$, dann existieren $a,b \in \mathbb{K}$, sodass $w = au + bv$ gilt. Falls $b \neq 0$, dann gilt $\omega(u,w) = b\omega(u,v) \neq 0$ und somit $w \notin \langle u,v\rangle^\omega$. Also ist $b = 0$. Analog findet man $a = 0$ und also $w = 0$.

Wir zeigen, dass $\langle u,v\rangle + \langle u,v\rangle^\omega = V$ gilt. Da $\langle u,v\rangle \cap \langle u,v\rangle^\omega = \{0\}$ gilt, wissen wir bereits, dass

$$\dim(\langle u,v\rangle + \langle u,v\rangle^\omega) = \dim(\langle u,v\rangle) + \dim(\langle u,v\rangle^\omega)$$

gilt. Insbesondere reicht es also zu zeigen, dass $\dim(\langle u,v\rangle^\omega) = \dim(V) - 2$ ist. Wir wissen, dass $v \notin \operatorname{Ker}(\omega_u)$ und $u \notin \operatorname{Ker}(\omega_v)$ gelten. Also ist nach der Dimensionsformel $\operatorname{nullity}(\omega_u) = \operatorname{nullity}(\omega_v) = \dim(V) - 1$. Andererseits gilt $v \notin \operatorname{Ker}(\omega_u)$ und $v \in \operatorname{Ker}(\omega_v)$, also ist $\operatorname{Ker}(\omega_u)$ ein echter Unterraum von $\operatorname{Ker}(\omega_u) + \operatorname{Ker}(\omega_v) = \langle \operatorname{Ker}(\omega_u) \cup \operatorname{Ker}(\omega_v)\rangle$ und somit

$$\dim(V) - 1 = \dim \operatorname{Ker}(\omega_u) < \dim\big(\operatorname{Ker}(\omega_u) + \operatorname{Ker}(\omega_v)\big) \leq \dim(V).$$

Es folgt $\operatorname{Ker}(\omega_u) + \operatorname{Ker}(\omega_v) = V$. Somit ist

$$\begin{aligned}
\dim\langle u,v\rangle^\omega &= \dim\big(\operatorname{Ker}(\omega_u) \cap \operatorname{Ker}(\omega_v)\big) \\
&= \operatorname{nullity}(\omega_u) + \operatorname{nullity}(\omega_v) - \dim\big(\operatorname{Ker}(\omega_u) + \operatorname{Ker}(\omega_v)\big) \\
&= 2\big(\dim(V) - 1\big) + \dim(V) = \dim(V) - 2.
\end{aligned}$$

Es ist klar, dass $\omega|_{\langle u,v\rangle^\omega}$ antisymmetrisch ist, und wir zeigen, dass die Einschränkung nicht-ausgeartet ist. Sei also $w \in \langle u,v\rangle^\omega$ nicht Null, dann existiert nach Voraussetzung ein $\tilde{w} \in V$, sodass $\omega(w,\tilde{w}) \neq 0$ gilt. Sei $\tilde{w} = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2$ mit $\tilde{w}_1 \in \langle u,v\rangle$ und $\tilde{w}_2 \in \langle u,v\rangle^\omega$, dann gilt wegen $w \in \langle u,v\rangle^\omega$, dass

$$0 \neq \omega(w,\tilde{w}) = \omega(w,\tilde{w}_1) + \omega(w,\tilde{w}_2) = \omega(w,\tilde{w}_2),$$

und da $w \in \langle u,v\rangle^\omega \setminus \{0\}$ beliebig war, folgt also dass für alle von Null verschiedenen $w \in \langle u,v\rangle^\omega$ ein $\tilde{w}_2 \in \langle u,v\rangle^\omega$ existiert, sodass $\omega(w,\tilde{w}_2) \neq 0$ ist. Insbesondere ist also $\omega|_{\langle u,v\rangle^\omega}$ nicht-ausgeartet.

Wir führen die Induktion formal zu Ende. Falls $\dim(V) \leq 2$, dann haben wir die Aussage bewiesen. Sei die Aussage also wahr für $\dim(V) \leq n$. Sei V ein Vektorraum der Dimension $\dim(V) \leq n+1$, und nehme an, es existiert eine

Siehe nächstes Blatt!

antisymmetrische, nicht-ausgeartete quadratische Form auf V. Dann finden wir Unterräume W, W' von V, sodass $V = W \oplus W'$ ist, $\dim(W) = 2$ gilt, und $\omega|_{W'}$ eine antisymmetrische, nicht-ausgeartete Bilinearform ist. Da $\dim(W') = \dim(V) - \dim(W) \leq n-1$ ist, folgt die Aussage aus der Induktionsvoraussetzung.

Bemerkung: Beachten Sie, dass im Falle $2 = 0$ jede antisymmetrische Bilinearform symmetrisch ist. Insbesondere gilt in diesem Falle *nicht*, dass $\omega(u,u) = 0$ für alle $u \in V$ ist. Somit funktioniert in diesem Falle die Induktionsverankerung nicht und die Vorgehensweise liefert keinen Beweis. Die Aussage ist in diesem Falle falsch, wie das Beispiel $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, (\lambda, \mu) \mapsto \lambda\mu$ zeigt.

5. Wir wissen aus der Vorlesung, dass ω_0 eine Bilinearform definiert. Es reicht also zu zeigen, dass ω_0 antisymmetrisch, nicht-ausgeartet ist.

Seien $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$, dann gilt

$$\omega_0(u,v) = \omega_0(u,v)^T = v^T J_0^T u = -v^T J_0 u = -\omega_0(v,u),$$

da $J_0^T = -J_0$. Also ist ω_0 antisymmetrisch.

Sei $u \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$ und seien $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$, sodass $u^T = (u_1^T, u_2^T)$ ist. Dann gilt

$$(-u_2^T, u_1^T) \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (-u_2^T, u_1^T) \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \|u_2\|^2 + \|u_1\|^2 > 0.$$

Also ist ω_0 nicht-ausgeartet.

6. **a)** Wir zeigen zuerst, dass $\mathrm{Sp}(V,\omega)$ abgeschlossen ist unter Komposition. Seien $\Psi, \Phi \in \mathrm{Sp}(V,\omega)$. Wir wissen aus der Vorlesung, dass $\Psi \circ \Phi \in \mathrm{End}(V)$ gilt. Für beliebige $u, v \in V$ berechnet man

$$\omega\big((\Psi \circ \Phi)u, (\Psi \circ \Phi)v\big) = \omega\big(\Psi(\Phi u), \Psi(\Phi v)\big) = \omega(\Phi u, \Phi v) = \omega(u,v)$$

und somit $\Psi \circ \Phi \in \mathrm{Sp}(V,\omega)$.

Wir zeigen als nächstes die Existenz eines neutralen Elements. Die Identitätsabbildung ist ein Einselement in $\mathrm{End}(V)$ bezüglich Komposition und folglich reicht es zu zeigen, dass $\mathrm{id}_V \in \mathrm{Sp}(V,\omega)$ gilt. Für beliebige $u, v \in V$ gilt nach Definition von id_V, dass

$$\omega(\mathrm{id}_V u, \mathrm{id}_V v) = \omega(u,v)$$

und somit $\mathrm{id}_V \in \mathrm{Sp}(V,\omega)$.

Wir zeigen die Existenz von Inversen. Hierfür zeigen wir zuerst, dass alle Elemente in $\operatorname{Sp}(V,\omega)$ invertierbar sind. Sei also $\Psi \in \operatorname{Sp}(V,\omega)$. Da V endlichdimensional ist, ist Ψ genau dann invertierbar, wenn Ψ injektiv ist. Sei $u \in \operatorname{Ker}(\Psi)$. Falls $u \neq 0$ ist, dann existiert nach Voraussetzung ein $v \in V$, sodass $\omega(u,v) \neq 0$ ist. Da Ψ ein Symplektomorphismus und da ω bilinear ist, folgt

$$0 = \omega(\Psi u, \Psi v) = \omega(u,v),$$

aber das ist absurd und somit ist $u = 0$. Das zeigt $\operatorname{Ker}(\Psi) = \{0\}$ und somit die Injektivität von Ψ. Da $\Psi \in \operatorname{Sp}(V,\omega)$ beliebig war, folgt $\operatorname{Sp}(V,\omega) \subseteq \operatorname{GL}(V)$. Hiermit können wir die Existenz der Inversen beweisen. Sei nämlich $\Psi \in \operatorname{Sp}(V,\omega)$ und sei $\Psi^{-1} \in \operatorname{GL}(V)$, sodass $\Psi^{-1} \circ \Psi = \Psi \circ \Psi^{-1} = \mathrm{id}_V$ gilt. Wir zeigen, dass $\Psi^{-1} \in \operatorname{Sp}(V,\omega)$ ist. Seien $u, v \in V$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned}
\omega(\Psi^{-1}u, \Psi^{-1}v) &= \omega\big(\Psi(\Psi^{-1}u), \Psi(\Psi^{-1}v)\big) \\
&= \omega\big((\Psi \circ \Psi^{-1})u, (\Psi \circ \Psi^{-1})v\big) \\
&= \omega(\mathrm{id}_V u, \mathrm{id}_V v) = \omega(u,v)
\end{aligned}$$

und somit ist Ψ^{-1} auch ein Symplektomorphismus.

b) Seien $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in V_1 \oplus V_2$ und sei $a \in \mathbb{K}$. Dann gelten

$$\begin{aligned}
\Omega(u, v + aw) &= \Omega\big((u_1,u_2), (v_1 + aw_1, v_2 + aw_2)\big) \\
&= -\omega_1(u_1, v_1 + aw_1) + \omega_2(u_2, v_2 + aw_2) \\
&= -\omega_1(u_1, v_1) + \omega_2(u_2, v_2) - a\omega_1(u_1, w_1) + a\omega_2(u_2, w_2) \\
&= \Omega(u,v) + a\Omega(u,w)
\end{aligned}$$

und analog zeigt man $\Omega(u + aw, v) = \Omega(u,v) + a\Omega(w,v)$. Somit ist Ω nach Aufgabe 1. bilinear. Es bleibt zu zeigen, dass Ω antisymmetrisch und nicht-ausgeartet ist.

Für die Antisymmetrie sei $u = (u_1, u_2) \in V_1 \oplus V_2$. Dann ist

$$\Omega(u,u) = -\omega_1(u_1,u_1) + \omega_2(u_2,u_2) = 0,$$

da ω_1, ω_2 antisymmetrisch sind.

Für die nicht-Ausgeartetheit, sei $u = (u_1, u_2) \in V_1 \oplus V_2$ von Null verschieden. Dann gilt $u_1 \neq 0$ oder $u_2 \neq 0$. Angenommen $u_1 \neq 0$, dann existiert wegen der nicht-Ausgeartetheit von ω_1 ein $v_1 \in V_1$, sodass $\omega_1(u_1, v_1) \neq 0$ ist und somit

$$\Omega\big((u_1,u_2),(v_1,0)\big) = -\omega_1(u_1,v_1) + \omega_2(u_2,0) = -\omega(u_1,v_1) \neq 0.$$

Falls $u_1 = 0$, dann existiert ein $v_2 \in V_2$, sodass $\omega_2(u_2, v_2) \neq 0$ und es folgt analog

$$\Omega\big((u_1,u_2),(0,v_2)\big) = \omega_2(u_2,v_2) \neq 0.$$

Also ist Ω nicht-ausgeartet.

Siehe nächstes Blatt!

c) “$\Rightarrow$”: Angenommen $\Gamma_\Psi = \Gamma_\Psi^\Omega$. Wir wollen zeigen, dass für alle $u, v \in V$ gilt $\omega(\Psi u, \Psi v) = \omega(u, v)$. Seien also $u, v \in V$ beliebig, dann gilt

$$(u, \Psi u), (v, \Psi v) \in \Gamma_\Psi = \Gamma_\Psi^\Omega$$

und somit

$$0 = \Omega\big((u, \Psi u), (v, \Psi v)\big) = -\omega(u, v) + \omega(\Psi u, \Psi v).$$

Da $u, v \in V$ beliebig waren, folgt

$$\forall u, v \in V : \omega(\Psi u, \Psi v) = \omega(u, v)$$

und damit $\Psi \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$.

“$\Leftarrow$”: Es sei $\Psi \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$. Wir zeigen zuerst, dass $\Gamma_\Psi \subseteq \Gamma_\Psi^\Omega$. Sei $u \in V$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass $(u, \Psi u) \in \Gamma_\Psi^\Omega$ ist. Sei also $v \in V$, dann gilt

$$\Omega\big((u, \Psi u), (v, \Psi v)\big) = -\omega(u, v) + \omega(\Psi u, \Psi v) = -\omega(u, v) + \omega(u, v) = 0$$

und somit ist $\Gamma_\Psi \subseteq \Gamma_\Psi^\Omega$.
Sei nun $(v_1, v_2) \in \Gamma_\Psi^\Omega$, dann gilt wegen der Bilinearität von ω und wegen $\Psi^{-1} \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$ für alle $u \in V$ die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = \Omega\big((u, \Psi u), (v_1, v_2)\big) &= -\omega(u, v_1) + \omega(\Psi u, v_2) \\ &= -\omega(u, v_1) + \omega(u, \Psi^{-1} v_2) = \omega(u, v_1 - \Psi^{-1} v_2). \end{aligned}$$

Wir haben im Beweis von Aufgabe 3.c) gesehen, dass für alle $v \in V \setminus \{0\}$ die Abbildung $V \to \mathbb{K}, u \mapsto \omega(u, v)$ eine von Null verschiedene Linearform ist. Also gilt $v_1 - \Psi^{-1} v_2 = 0$ und somit $v_2 = \Psi v_1$. Also ist $(v_1, v_2) \in \Gamma_\Psi$ und es folgt $\Gamma_\Psi^\Omega \subseteq \Gamma_\Psi$.