Serie 21:
Bilinearformen

1. **a)** Im Folgenden sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform auf V. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften von β:

1. Sei $v \in V$, dann sind die Abbildungen $L_v, R_v : V \to \mathbb{K}$ definiert durch
$$L_v(u) := \beta(v, u) \text{ und } R_v(u) := \beta(u, v) \quad (u \in V)$$
linear.
2. $\beta(u, 0) = \beta(0, u) = 0$ für alle $u \in V$.
3. Für alle $u, v, w, z, \in V$ gilt
$$\beta(u + v, w + z) = \beta(u, w) + \beta(v, w) + \beta(u, z) + \beta(v, z).$$
4. Sei $\alpha : V \times V \to \mathbb{K}$ die Abbildung gegeben durch
$$\alpha(u, v) := \beta(v, u) \quad (u, v \in V).$$
Dann ist α eine Bilinearform auf V.

b) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $S \subseteq V$ und $\beta \in \mathrm{BF}(V)$. Zeigen Sie, dass S^β ein Unterraum von V ist, wobei
$$S^\beta = \{v \in V \mid \forall w \in S : \beta(v, w) = 0\}.$$

♡**c)** Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $n = \dim(V)$. Zeigen Sie, dass für jede geordnete Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V die Abbildung $\psi_\mathcal{B} : \mathrm{BF}(V) \to M_{n\times n}(\mathbb{K})$, gegeben durch
$$\forall \beta \in \mathrm{BF}(V) : \ \psi_\mathcal{B}(\beta)_{ij} = \beta(v_i, v_j) \quad (1 \leq i, j \leq n)$$
eine lineare Abbildung ist.

Bitte wenden!

d) Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Wir sagen, A ist kongruent zu B, falls ein $Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ existiert, sodass $B = Q^T AQ$ gilt. Zeigen Sie, dass Kongruenz eine Äquivalenzrelation definiert.

2. Betrachten Sie den Vektorraum $V = M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ zusammen mit der geordneten Basis $\mathcal{B}$ gegeben durch

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Sei $\beta : V \times V \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\beta(A, B) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$. Zeigen Sie, dass β bilinear ist und bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[\beta]_{\mathcal{B}}$ bezüglich $\mathcal{B}$ von β.

3. Seien V und W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\beta : V \times W \to \mathbb{K}$ heisst Bilinearform, falls für jedes $v_1 \in V$ und $w_1 \in W$ die Abbildungen

$$V \to \mathbb{K}, v \mapsto \beta(v, w_1) \quad \text{(Linearität im 1. Argument)}$$
$$W \to \mathbb{K}, w \mapsto \beta(v_1, w) \quad \text{(Linearität im 2. Argument)}$$

linear sind.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $V^* \times V \to \mathbb{K}$, $(f, v) \mapsto f(v)$ eine Bilinearform ist.

b) Definieren Sie eine Vektorraumstruktur auf der Menge der bilinearen Abbldungen $V \times W \to \mathbb{K}$.

c) Eine Bilinearform $\beta : V \times W \to \mathbb{K}$ heisst *nicht-ausgeartet*, wenn gilt

$$\forall v \in V \setminus \{0\} \exists w \in W : \beta(v, w) \neq 0,$$
$$\forall w \in W \setminus \{0\} \exists v \in V : \beta(v, w) \neq 0.$$

Zeigen Sie dass zwei endlichdimensionale Vektorräume V, W genau dann isomorph sind, wenn eine nicht-ausgeartete Bilinearform $\beta : V \times W \to \mathbb{K}$ existiert.

4. Im Folgenden sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $2 \neq 0$ in $\mathbb{K}$. Eine Bilinearform $\omega \in \mathrm{BF}(V)$ heisst *antisymmetrisch*, falls

$$\forall u, v \in V : \omega(u, v) = -\omega(v, u).$$

a) Zeigen Sie, dass $\omega \in \mathrm{BF}(V)$ genau dann antisymmetrisch ist, wenn $\omega(u, u) = 0$ gilt für alle $u \in V$.

Siehe nächstes Blatt!

$^\heartsuit$**b)** Sei V endlichdimensional und ω eine nicht-ausgeartete, antisymmetrische Bilinearform auf V. Zeigen Sie, dass $\dim(V)$ gerade ist.

Bemerkung: Eine antisymmetrische, nicht-ausgeartete Bilinearform auf V heisst *symplektisch*. Ein Vektorraum mit einer symplektischen Form ist ein symplektischer Vektorraum.

5. Seien $n \geq 1$ und $J_0 \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $\omega_0 \in \mathrm{BF}(\mathbb{R}^{2n})$ gegeben durch

$$\omega_0(u,v) = u^T J_0 v \qquad (u, v \in \mathbb{R}^{2n})$$

eine symplektische Form auf $\mathbb{R}^{2n}$ definiert.

6. Im Folgenden sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $2 \neq 0$ in $\mathbb{K}$ und $\omega \in \mathrm{BF}(V)$ eine symplektische Form auf V.

a) Sei $\omega \in \mathrm{BF}(V)$ symplektisch. Im Folgenden bezeichnet

$$\mathrm{Sp}(V,\omega) = \{\Psi \in \mathrm{End}(V) \mid \forall u, v \in V : \omega(\Psi u, \Psi v) = \omega(u,v)\}$$

die Menge der *Symplektomorphismen*. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sp}(V,\omega)$ bezüglich Komposition eine Gruppe bildet.

b) Seien $(V_1,\omega_1), (V_2,\omega_2)$ symplektische Vektorräume. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Omega : (V_1 \oplus V_2) \times (V_1 \oplus V_2) \to \mathbb{K}$ gegeben durch

$$\Omega\big((u_1,u_2),(v_1,v_2)\big) = -\omega_1(u_1,v_1) + \omega_2(u_2,v_2) \quad \big((u_1,u_2),(v_1,v_2) \in V_1 \oplus V_2\big)$$

eine symplektische Form auf $V_1 \oplus V_2$ definiert.

Ein Unterraum $W \subseteq V$ ist ein *Lagrange-Unterraum*, falls $W = W^\omega$ gilt, wobei W^ω definiert ist wie in Aufgabe 1.b).

c) Sei $\Psi \in \mathrm{End}(V)$ und sei Γ_Ψ der Graph von Ψ, d.h.

$$\Gamma_\Psi = \{(u,v) \in V \times V \mid v = \Psi u\}.$$

Zeigen Sie, dass Γ_Ψ genau dann ein Lagrange-Unterraum von $V \oplus V$ (bezüglich Ω wie in Teil 6.b)) ist, wenn $\Psi \in \mathrm{Sp}(V,\omega)$ gilt.

Bitte wenden!

7. Online-Abgabe

1. Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ für einen Körper $\mathbb{K}$ und seien A, B kongruent. Dann gilt $\sigma(A) = \sigma(B)$.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

2. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\dim(V) > 1$ und sei $\beta \in \mathrm{BF}(V)$. Dann existiert für jedes $u \in V$ ein $v \in V \setminus \{0\}$, sodass $\beta(u, v) = 0$.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

3. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und sei $\beta \in \mathrm{BF}(V)$, dann existiert eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass $[\beta]_{\mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix ist.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

4. Betrachte die Abbildung $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\beta\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) := \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist β bilinear.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

Siehe nächstes Blatt!

5. *Prüfung Sommer 2017:* Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{F}_3$-Vektorraum und sei β eine nicht-ausgeartete Bilinearform auf V. Dann ist jede Darstellungsmatrix von β invertierbar.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

6. *Prüfung Winter 2018:* Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ zwei kongruente Matrizen. Dann haben A und B dieselben Eigenwerte.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Donnerstag, den 12. April, vor 14:00 Uhr im HG J 68 in einem der Fächer beschriftet mit Abgabe.