Lösung 22:
Symmetrische Bilinearformen & quadratische Formen

1. **a)** Man beachte, dass β ein inneres Produkt ist. Die Symmetrie folgt aus der Symmetrie von A. Seien nun $v = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, dann ist

$$\beta(v, v) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = (\sqrt{5}x_1 + \tfrac{2}{5}x_2)^2 + (5 - \tfrac{4}{5})x_2^2 \geq 0$$

und somit ist β positiv semidefinit. Da A invertierbar ist, ist somit A positiv definit.

Wir wenden das Gram-Schmidt Orthonoalisierungsverfahren auf die positiv definite, symmetrische Bilinearform β und die Standardbasis $\mathcal{E}_2$ an. Sei $v_1 := e_1$. Es ist $\beta(v_1, v_1) = 5$. Definiere

$$v_2 := e_2 - \frac{\beta(v_2, v_1)}{\beta(v_1, v_1)} v_1 = -\frac{2}{5} e_1 + e_2.$$

Da v_1, v_2 linear unabhängig sind, ist $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ eine geordnete Basis von $\mathbb{R}^2$.

Es gilt

$$\beta(v_2, v_2) = (-2/5, 1) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/5 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, 21/5) \begin{pmatrix} 2/5 \\ 1 \end{pmatrix} = 21/5$$

sowie nach Konstruktion

$$\beta(v_1, v_2) = \beta(v_2, v_1) = 0.$$

Da $\beta(v_i, v_i) > 0$ ist für $i = 1, 2$, sind $w_i := \frac{1}{\sqrt{\beta(v_i, v_i)}} v_i$ wohldefiniert und $\mathcal{B} = (w_1, w_2)$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Aus der Bilinearität von β folgt $\beta(w_i, w_j) = \delta_{i,j}$ $(i, j = 1, 2)$, und somit ist $[\beta]_{\mathcal{B}} = I_2$.

Bitte wenden!

b) Wir verwenden die in der Vorlesung skizzierte, symmetrische Diagonalisierung, und erhalten unter der dort verwendeten Notation – d.h. wir wenden auf die rechte Seite der erweiterten Matrix nur die Zeilenoperationen an – folgende diagonale Form

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{S_2 \to S_2 + S_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{Z_2 \to Z_2 + Z_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{S_3 \to S_3 - \frac{2}{3}S_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \frac{5}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{Z_3 \to Z_3 - \frac{2}{3}Z_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{S_3 \to S_3 - \frac{1}{2}S_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{Z_3 \to Z_3 - \frac{1}{2}Z_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Es gilt also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} \end{pmatrix}.$$

Da A – die Darstellungsmatrix bezüglich $\mathcal{E}_3$ – kongruent ist zu einer Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen, ist die zugehörige Bilinearform positiv definit. Wir zeigen diese Aussage im Allgemeinen. Sei also $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix und sei $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sodass $D = Q^T AQ$ eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen ist. Wir schreiben $\lambda_i = D_{ii}$ für $1 \leq i \leq n$. Sei $\mathcal{B} = (Qe_1, \dots, Qe_n)$ das Bild der Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ unter Linksmultiplikation mit Q. Da Q invertierbar ist, ist $\mathcal{B}$ wieder eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Sei $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig, dann ist $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i(Qe_i)$ für eindeutige $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$\begin{aligned} v^T Av &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i\alpha_j(Qe_i)^T A(Qe_j) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i\alpha_j e_i^T Q^T AQe_j \\ &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i\alpha_j D_{ij} = \sum_{i=1}^n \lambda_i\alpha_i^2 \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

und wegen der Positivität der λ_i ist also $v^T A v \leq 0$ genau dann, wenn $\alpha_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Alternativ kann man das Hauptminorenkriterium verwenden, das in der Analysis diskutiert wurde. Es ergeben sich

$$\det(3) = 3, \quad \det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = 5, \quad \det(A) = 7,$$

und da alle Hauptminoren positiv sind, ist A positiv definit und damit auch die zugehörige Bilinearform.

2. Wir erinnern an den Hauptachsensatz: Jede von 0 verschiedene quadratische Form Q auf $\mathbb{R}^3$ ist bis auf Kongruenz äquivalent zu einer quadratischen Form definiert durch Diagonalmatrizen der Form

$$\pm\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass $X_{-Q,a} = X_{Q,-a}$ gilt, und folglich reicht es aus, die Fälle $(p,q) = (0,0)$, $(p,q) = (1,0)$, $(p,q) = (2,0)$, $(p,q) = (3,0)$, $(p,q) = (1,1)$ sowie $(p,q) = (2,1)$ zu beschreiben.

“$p = 0, q = 0$”: Die quadratische Form ist die 0 Form, also gilt $X_{Q,a} = \mathbb{R}^3$ falls $a = 0$ ist, und $X_{Q,a} = \emptyset$ sonst.

“$p = 1, q = 0$”: Die quadratische Form ist das Monom in der ersten Koordinate $x \mapsto \alpha_1 x_1^2$ auf $\mathbb{R}$ mit $\alpha_1 > 0$. Folglich gilt

$$X_{Q,a} = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } a < 0 \\ \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\} & \text{falls } a = 0 \\ \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \pm\sqrt{a/\alpha_1}\} & \text{sonst} \end{cases},$$

also entweder die leere Menge, die yz-Ebene, oder die disjunkte Vereinigung zweier Ebenen parallel zur yz-Ebene.

“$p = 2, q = 0$”: Die quadratische Form bildet entlang der Hauptachsen x auf $\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2$ ab, wobei $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Im Wesentlichen handelt es sich um eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^2$ und da wissen wir, dass für alle $a < 0$ gilt $X_{Q,a} = \emptyset$ und für $a \geq 0$ die Quadrik eine Ellipse definiert. Insbesondere sei $a \geq 0$, dann bildet für fixes $z \in \mathbb{R}$ die Menge

$$X_{Q,a} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x_3 = z\}$$

eine Ellipse von Radius $\sqrt{a}$ um den Punkt $(0,0,z)$ in der Ebene

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid z = x_3\}$$

Bitte wenden!

und somit ist $X_{Q,a}$ die Oberfläche eines Zylinders mit Querschnittsfläche eine Ellipse mit Mittelpunkt auf der z-Achse.

"$p = 1, q = 1$": Die quadratische Form bildet entlang der Hauptachsen x auf $\alpha_1 x_1^2 - \alpha_2 x_2^2$ ab, wobei $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Im Wesentlichen handelt es sich um eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^2$ und da wissen wir, dass für $a = 0$ die Menge $X_{Q,a}$ ein Paar von Geraden durch den Ursprung ist und für $a \neq 0$ die Quadrik eine Hyperbel definiert. Analog zum vorangehenden Beispiel ist die Quadrik im $\mathbb{R}^3$ gegeben als die Vereinigung aller zur x_3-Achse parallelen Geraden, welche die x_1, x_2-Ebene in einer der entsprechenden Geraden ($a = 0$) bzw. in der entsprechenden Hyperbel ($a \neq 0$) schneiden.

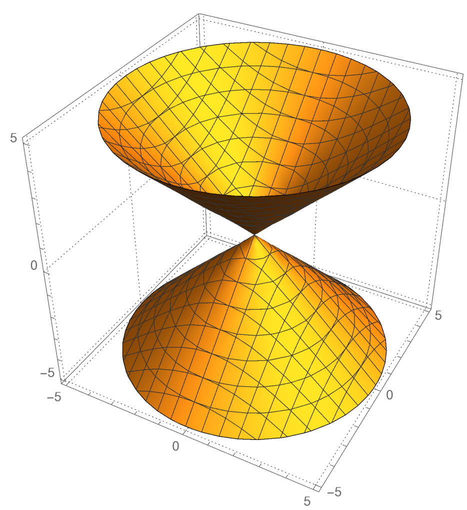
"$p = 3, q = 0$": Es ist klar, dass $Q(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$, und folglich ist $X_{Q,a} = \emptyset$, wann immer $a < 0$. Für $a \geq 0$ definiert die Gleichung

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 = a$$

mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ die Oberfläche eines Ellipsoids.

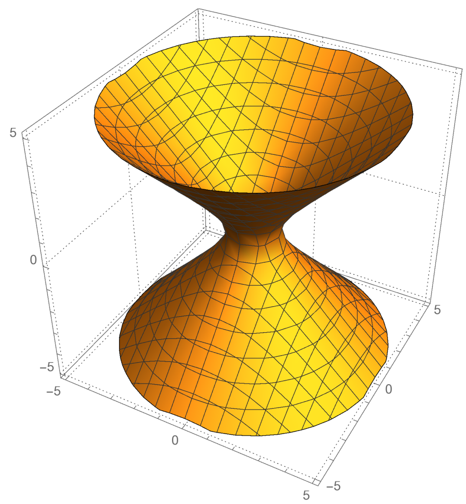
"$p = 2, q = 1$": Die quadratische Form bildet entlang der Hauptachsen x auf $\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 - \alpha_3 x_3^3$ ab mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$. Die Quadrik $X_{Q,a}$ ist also gegeben durch die Menge der $x \in \mathbb{R}^3$, sodass $\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = a + \alpha_3 x_3^2$.

"$a = 0$": Für jedes von Null verschiedene $z \in \mathbb{R}$ ist die Menge der Lösungen auf Höhe $x_3 = z$, d.h. die Menge $X_{Q,a} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = z\}$, eine nicht-degenerierte Ellipse, und für $z = 0$ ist $X_{Q,a} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = z\} = \{0\}$. Die Vereinigung dieser Mengen für variierende z liefert einen Kegel (mit Querschnittsfläche eine Ellipse). Im folgenden Bild ist der Fall $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ illustriert.

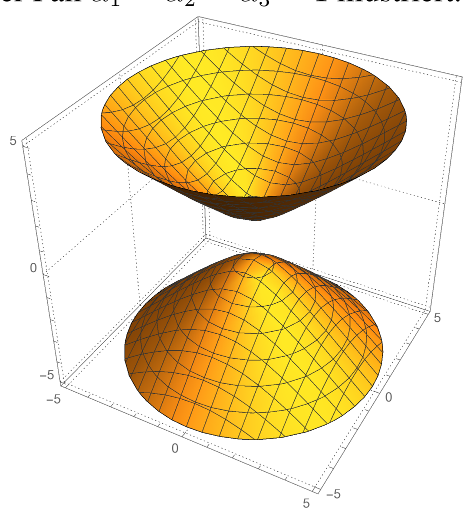


"$a > 0$": Für jedes $z \in \mathbb{R}$ ist die Schnittmenge $X_{Q,a} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = z\}$ eine nicht-degenerierte Ellipse, und die Vereinigung dieser Ellipsen für variierende $z \in \mathbb{R}$ liefert ein sogenanntes einschaliges Hyperboloid. Im folgenden Bild ist der Fall $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ illustriert.

Siehe nächstes Blatt!



"$a < 0$": Man beachte, dass für jede Lösung $Q(x) = a$ die Ungleichung $a + \alpha_3 x_3^2 \geq 0$ erfüllt sein muss. Also ist $X_{Q,a} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = z\}$ genau dann nicht-leer, wenn $|z| \geq \sqrt{-a/\alpha_3}$. Für den Spezialfall $|z| \geq \sqrt{-a/\alpha_3}$ erhalten wir $X_{Q,a} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = z\} = \{ze_3\}$ und für $|z| > \sqrt{-a/\alpha_3}$ erhalten wir wieder eine nicht-degenerierte Ellipse. Die Vereinigung dieser Mengen für variierende $z \in \mathbb{R}$ liefert ein sogenanntes zweischaliges Hyperboloid. Im folgenden Bild ist der Fall $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ illustriert.



3. a) (i) impliziert (ii): Da die Abbildung β_Q bilinear ist, existieren eine Basis $\mathcal{B}$ von V sowie eine durch $\mathcal{B}$ eindeutig bestimmte Matrix A, sodass

$$\beta_Q(v, w) = [v]_{\mathcal{B}}^T A [w]_{\mathcal{B}} \quad (v, w \in V)$$

gilt. Insbesondere ist also

$$[v]_{\mathcal{B}}^T A [v]_{\mathcal{B}} = \beta_Q(v, v) = \frac{1}{2}\big(Q(2v) - 2Q(v)\big) = Q(v).$$

Bitte wenden!

(ii) impliziert (i): Aus der Linearität des Isomorphismus $v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$ folgt

$$Q(\lambda v) = [\lambda v]_{\mathcal{B}}^T A[\lambda v]_{\mathcal{B}} = \lambda^2 [v]_{\mathcal{B}}^T A[v]_{\mathcal{B}} = \lambda^2 Q(v) \quad (v \in V, \lambda \in \mathbb{K}),$$

da $[\lambda v]_{\mathcal{B}} = \lambda[v]_{\mathcal{B}}$.
Man beachte, dass die Abbildung β_Q symmetrisch ist, d.h. für alle $v, w \in V$ gilt $\beta_Q(v, w) = \beta_Q(w, v)$. Insbesondere reicht es zu zeigen, dass β_Q linear ist im zweiten Argument. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ und seien $v, w_1, w_2 \in V$, dann gilt wegen der Linearität von $v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$

$$\begin{aligned}
\beta_Q(v, w_1 + \lambda w_2) =& [v]_{\mathcal{B}}^T A[w_1 + \lambda w_2]_{\mathcal{B}} \\
=& [v]_{\mathcal{B}}^T A\big([w_1]_{\mathcal{B}} + \lambda[w_2]_{\mathcal{B}}\big) \\
=& [v]_{\mathcal{B}}^T A[w_1]_{\mathcal{B}} + \lambda[v]_{\mathcal{B}}^T A[w_2]_{\mathcal{B}} \\
=& \beta_Q(v, w_1) + \lambda\beta_Q(v, w_2)
\end{aligned}$$

unter Verwendung der Distributivität der Matrixmultiplikation über die Matrixaddition. Da λ, v, w_1, w_2 beliebig waren, ist β_Q linear im zweiten Argument und wegen der Symmetrie bilinear.

b) Man überprüft leicht, dass die Nullabbildung eine quadratische Form auf V definiert (überprüfen Sie dies). Insbesondere ist die Menge der quadratischen Formen auf V nicht leer. Seien Q_1, Q_2 quadratische Formen auf V und sei $\mu \in \mathbb{K}$. Wir zeigen, dass die Abbildung $Q_1 + \mu Q_2$ eine quadratische Form auf V definiert. Für $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$(Q_1+\mu Q_2)(\lambda v) = Q_1(\lambda v)+\mu Q_2(\lambda v) = \lambda^2 Q_1(v)+\mu\lambda^2 Q_2(v) = \lambda^2(Q_1+\mu Q_2)(v).$$

Wir zeigen die Linearität von $\beta_{Q_1+\mu Q_2}$ im ersten Argument. Seien $v_1, v_2, w \in V$ und sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
2\beta_{Q_1+\mu Q_2}(v_1 + \lambda v_2, w) =& (Q_1 + \mu Q_2)(v_1 + \lambda v_2 + w) \\
& - (Q_1 + \mu Q_2)(v_1 + \lambda v_2) - (Q_1 + \mu Q_2)(w) \\
=& Q_1(v_1 + \lambda v_2 + w) + \mu Q_2(v_1 + \lambda v_2 + w) \\
& - Q_1(v_1 + \lambda v_2) - \mu Q_2(v_1 + \lambda v_2) \\
& - Q_1(w) - \mu Q_2(w) \\
=& 2\beta_{Q_1}(v_1 + \lambda v_2, w) + 2\mu\beta_{Q_2}(v_1 + \lambda v_2, w) \\
=& 2\beta_{Q_1}(v_1, w) + 2\lambda\beta_{Q_1}(v_2, w) \\
& + 2\mu\beta_{Q_2}(v_1, w) + 2\mu\beta_{Q_2}(v_2, w) \\
=& Q_1(v_1 + w) - Q_1(v_1) - Q_1(w) \\
& + \lambda Q_1(v_2, w) - \lambda Q_1(v_2) - \lambda Q_1(w) \\
& + \mu Q_2(v_1 + w) - \mu Q_2(v_1) - \mu Q_2(w) \\
& + \lambda\mu Q_2(v_2, w) - \lambda\mu Q_2(v_2) - \lambda\mu Q_2(w)
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$
\begin{aligned}
=&(Q_1+\mu Q_2)(v_1+w)-(Q_1+\mu Q_2)(v_1)\\
&\quad-(Q_1+\mu Q_2)(w)\\
&+\lambda(Q_1+\mu Q_2)(v_2+w)-\lambda(Q_1+\mu Q_2)(v_2)\\
&\quad-\lambda(Q_1+\mu Q_2)(w)\\
=&2\beta_{Q_1+\mu Q_2}(v_1,w)+2\lambda\beta_{Q_1+\mu Q_2}(v_2,w).
\end{aligned}
$$

Also ist $\beta_{Q_1+\mu Q_2}$ linear im ersten Argument. Da $\beta_{Q_1+\mu Q_2}$ symmetrisch ist, folgt die Bilinearität.

Insbesondere besitzt die Abbildung $Q_1+\mu Q_2$ die Eigenschaften aus Teilaufgabe a), (i). Somit ist $Q_1+\mu Q_2$ eine quadratische Form auf V.

Somit ist gezeigt, dass die Menge der quadratischen Formen auf V ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(V,\mathbb{K})$ ist.

Als Zwischenresultat liefert obige Rechnung im Spezialfall $v_2=0$ die Gleichung

$$\beta_{Q_1+\mu Q_2}(v_1,w)=\beta_{Q_1}(v_1,w)+\mu\beta_{Q_2}(v_1,w).$$

Da v_1,w beliebig waren, gilt also $\beta_{Q_1+\mu Q_2}=\beta_{Q_1}+\mu\beta_{Q_2}$ und somit ist die Abbildung $Q\mapsto\beta_Q$ linear. Die Abbildung ist sicherlich symmetrisch, und somit wohldefiniert.

Sei β eine symmetrische Bilinearform auf V, und definiere $Q:V\to\mathbb{K}$ durch $Q(v):=\beta(v,v)$ für alle $v\in V$. Dann gilt für beliebige $\lambda\in\mathbb{K}$ und $v\in V$

$$Q(\lambda v)=\beta(\lambda v,\lambda v)=\lambda^2\beta(v,v)=\lambda^2Q(v)$$

wegen der Bilinearität von β. Des Weiteren ist

$$
\begin{aligned}
2\beta_Q(v,w)=&Q(v+w)-Q(v)-Q(w)\\
=&\beta(v+w,v+w)-\beta(v,v)-\beta(w,w)=2\beta(v,w)
\end{aligned}
$$

wegen der Symmetrie von β. Folglich ist β_Q bilinear und Q eine quadratische Form.

Da β beliebig war, ist die Abbildung $Q\mapsto\beta_Q$ insbesondere surjektiv und invertierbar, und somit ein Isomorphismus.

4. **a)** **“$\Rightarrow$”:** Wir machen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen W ist ausgeartet. Dann existiert ein $w\in W\setminus\{0\}$ mit $\beta(w,w')=0$ für alle $w'\in W$. Per definitionem folgt daraus $w\in W^\beta$ und somit $W\cap W^\beta\neq\{0\}$, im Widerspruch zur Annahme $V=W\oplus W^\beta$.

“$\Leftarrow$”: Wir zeigen zuerst, dass $W \cap W^\beta = \{0\}$. Angenommen dies ist nicht wahr, dann existiert ein $w \in W \cap W^\beta$ mit $w \neq 0$. Da $W \in W^\beta$, gilt $\beta(w, w') = 0$ für alle $w' \in W$. Insbesondere ist β ausgeartet.
Wir müssen also nur noch zeigen, dass $V = W + W^\beta$. Sei $v \in V$ beliebig und betrachte die Abbildung $\beta(v, \cdot) : V \to \mathbb{K}$. Die Restriktion von $\beta(v, \cdot)$ auf W definiert ein Element in W^*. Wie in Serie 21, Aufgabe 3c, argumentiert wurde, existiert also ein $w \in W$, sodass $\beta(v, w') = \beta(w, w')$ für alle $w' \in W$ gilt. Insbesondere ist also

$$\forall w' \in W : \beta(v - w, w') = \beta(v, w') - \beta(w, w') = 0$$

und folglich $v - w \in W^\beta$, i.e. es existiert $u \in W^\beta$ mit $v - w = u$ und folglich $v = w + u \in W + W^\beta$.

b) Der Beweis funktioniert per Induktion über die Dimension von V.

Induktionsannahme: Falls $\dim(V) = 1$ ist, dann ist $V = \langle v \rangle$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$. Sei $v \in V \setminus \{0\}$ beliebig. Dann existiert $w \in V$, sodass $\beta(v, w) \neq 0$ gilt. Aus der Linearität von $\beta(v, \cdot)$ folgt $w \neq 0$ und wegen der vorangehenden Bemerkung wissen wir, dass ein $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ existiert, sodass $w = \lambda v$. Insbesondere ist

$$\beta(v, v) = \beta(v, \lambda^{-1} w) = \lambda^{-1} \beta(v, w) \neq 0.$$

Da (v) eine Basis von V ist, folgt somit die Behauptung.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei die Aussage bewiesen für Bilinearformen auf Vektorrräumen der Dimension n. Sei $\dim(V) = n + 1$ und β eine nicht ausgeartete Bilinearform auf V. Wir wissen aus der Vorlesung, dass ein $v \in V$ existiert, sodass $\beta(v, v) \neq 0$ ist. Insbesondere ist $\langle v \rangle$ ein nicht ausgearteter Unterraum von V, und somit gilt nach vorangehender Teilaufgabe $V = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\beta$. Man beachte, dass $\dim \langle v \rangle^\beta = \dim(V) - \dim \langle v \rangle = n$. Angenommen wir wüssten bereits, dass $\beta|_{\langle v \rangle^\beta \times \langle v \rangle^\beta}$ nicht ausgeartet ist. Dann existiert nach Induktionsvoraussetzung eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von $\langle v \rangle^\beta$, sodass $\beta(v_i, v_j) \neq 0$ genau dann, wenn $i \neq j$ ist. Wegen $V = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\beta$ ist die geordnete Menge $(v_1, \ldots, v_n, v)$ linear unabhängig. Seien nämlich $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{K}$ mit $0 = \beta v + \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ und $\beta \neq 0$, dann ist $v = -\sum_{i=1}^n \beta^{-1} \alpha_i v_i$ und folglich $v \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \langle v \rangle^\beta$, im Widerspruch zur Annahme, dass $\beta(v, v) \neq 0$. Also ist $\beta = 0$ und somit folgt $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ aus der linearen Unabhängigkeit von $(v_1, \ldots, v_n)$. Wegen $\dim(V) = n + 1$ ist also $(v_1, \ldots, v_n, v)$ eine Basis von v. Definiere $v_{n+1} = v$, dann gilt $\beta(v_{n+1}, v_i) = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$ nach Definition von $\langle v \rangle^\beta$. Nach Wahl von v gilt $\beta(v_{n+1}, v_{n+1}) \neq 0$ und für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt nach Voraussetzung $\beta(v_i, v_j) = 0$ genau dann, wenn $i \neq j$.
Es bleibt zu zeigen, dass $\beta|_{\langle v \rangle^\beta \times \langle v \rangle^\beta}$ nicht ausgeartet ist. Sei $u \in \langle v \rangle^\beta \setminus \{0\}$. Da β nicht ausgeartet ist, existiert $w \in V$, sodass $\beta(u, w) \neq 0$ gilt. Sei

Siehe nächstes Blatt!

$w = w_1 + w_2$ mit $w_1 \in \langle v \rangle$ und $w_2 \in \langle v \rangle^\beta$, dann gilt

$$0 \neq \beta(u, w) = \beta(u, w_1) + \beta(u, w_2) = \beta(u, w_2)$$

wegen $u \in \langle v \rangle^\beta$. Da $u \in \langle v \rangle^\beta$ beliebig war, ist β eingeschränkt auf $\langle v \rangle^\beta$ also nicht ausgeartet und der Induktionsschritt damit bewiesen.

5. **a)** A und B sind orthogonal diagonalisierbar, d.h. es existieren orthogonale Matrizen $Q_1, Q_2 \in O(n)$, sodass $Q_1^T A Q_1$ und $Q_2^T B Q_2$ Diagonalmatrizen sind. Da A, B positiv definit sind, sind die Diagonaleinträge von $Q_1^T A Q_1$ und $Q_2 B Q_2$ strikt positiv. Da Q_1, Q_2 orthogonale Matrizen sind, ist A ähnlich zu $Q_1^T A Q_1$ und B ähnlich zu $Q_2^T B Q_2$. Da die Eigenwerte einer Matrix invariant sind unter Ähnlichkeit, sind die Eigenwerte von A und B insbesondere alle positiv.

Wir wissen aus Serie 16, Aufgabe 4, dass A und B simultan diagonalisierbar sind, d.h. es existiert eine Matrix $S \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, sodass $S^{-1}AS$ und $S^{-1}BS$ Diagonalmatrizen sind. Wieder sind die Diagonaleinträge von $S^{-1}AS$ und $S^{-1}BS$ genau die Eigenwerte von A bzw. von B, und insbesondere positiv. Also sind auch die Diagonaleinträge der Diagonalmatrix

$$(S^{-1}AS)(S^{-1}BS) = S^{-1}ABS$$

positiv und somit sind, wieder wegen Invarianz unter Ähnlichkeit, die Eigenwerte von AB alle positiv.

Da $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$, ist AB orthogonal diagonalisierbar, d.h. es existiert $Q \in O(n)$, sodass $Q^T ABQ$ eine Diagonalmatrix ist, und wieder sind die Diagonaleinträge alle positiv, wegen Invarianz unter Ähnlichkeit.

Sei nun $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, dann ist

$$v^T ABv = (QQ^T v)^T AB(QQ^T v) = (Q^T v)^T Q^T ABQ(Q^T v) > 0.$$

b) (i) Aus der Definition eines inneren Produkts folgt, dass die Abbildung β_T linear ist im ersten Argument. Seien $v, w_1, w_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Aus der Symmetrie des inneren Produkts folgt

$$\begin{aligned}\beta_T(v, w_1 + \lambda w_2) =& \langle T(w_1 + \lambda w_2), v\rangle = \langle T(w_1) + \lambda T(w_2), v\rangle \\ =& \langle T(w_1), v\rangle + \lambda\langle T(w_2), v\rangle = \beta_T(v, w_1) + \lambda\beta_T(v, w_2).\end{aligned}$$

Somit ist β_T linear im zweiten Argument und insbesondere bilinear.

(ii) **"$\Leftarrow$":** Wenn T selbstadjungiert ist, dann gilt für alle $v, w \in V$

$$\beta_T(v, w) \overset{\text{Def.}}{=} \langle v, Tw\rangle \overset{T=T^*}{=} \langle Tv, w\rangle \overset{\text{Symmetrie}}{=} \langle w, Tv\rangle \overset{\text{Def.}}{=} \beta_T(w, v)$$

wegen der Symmetrie des inneren Produkts.

Bitte wenden!

"$\Rightarrow$": Sei β_T symmetrisch, dann gilt für alle $v, w \in V$, dass

$$\langle v, Tw\rangle = \beta_T(v,w) = \beta_T(w,v) = \langle w, Tv\rangle = \langle Tv, w\rangle.$$

Also besitzt T die notwendige Eigenschaft und ist eine Adjungierte zu T. Somit folgen die Existenz von T^* sowie die Selbstadjungiertheit $T^* = T$ aus der Eindeutigkeit der Adjungierten.

(iii) Wir wissen aus den Teilen (i) und (ii), dass β_T linear ist im ersten Argument. Wir behaupten also, dass genau dann $\beta_T(v,v) > 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$ und $\beta_T(v,w) = \beta_T(w,v)$ für alle $v, w \in V$ gelten, wenn eine Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, sodass $[T]_\mathcal{B}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix ist.

"$\Rightarrow$": Da die Abbildung $(v,w) \mapsto \langle v, w\rangle$ eine symmetrische, positiv definite Bilinearform ist, existiert eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V sowie eine Diagonalmatrix D mit strikt positiven Einträgen auf der Diagonalen, sodass

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n : \langle v, w\rangle = [v]_\mathcal{B}^T D [w]_\mathcal{B}.$$

Wir definieren die Basis $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_n)$ von V durch $w_i = D_{ii}^{-\frac{1}{2}} v_i$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\langle w_i, w_j\rangle =& (D_{ii}D_{jj})^{-\frac{1}{2}}\langle v_i, v_j\rangle = (D_{ii}D_{jj})^{-\frac{1}{2}}[v_i]_\mathcal{B}^T D [v_j]_\mathcal{B}\\ =& (D_{ii}D_{jj})^{-\frac{1}{2}} e_i^T D e_j = \delta_{ij},\end{aligned}$$

und es folgt wegen der Bilinearität und der Eindeutigkeit der Darstellungsmatrix bezüglich $\mathcal{C}$, dass

$$\forall v, w \in V : \langle v, w\rangle = [v]_\mathcal{C}^T [w]_\mathcal{C}.$$

Insbesondere ist

$$\beta_T(v,w) = [v]_\mathcal{C}^T [T]_\mathcal{C} [w]_\mathcal{C}$$

und folglich ist β_T genau dann ein inneres Produkt, wenn $[T]_\mathcal{C}$ symmetrisch und positiv definit ist. Falls β_T ein inneres Produkt ist, folgt also, dass eine Basis $\mathcal{C}$ von V existiert, sodass $[T]_\mathcal{C}$ symmetrisch und positiv definit ist.

"$\Leftarrow$": Wir nehmen an, dass T selbstadjungiert ist und eine Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, sodass $B := [T]_\mathcal{B}$ symmetrisch und positiv definit ist. Da $\langle \cdot, \cdot\rangle$ ein inneres Produkt ist, existiert eine symmetrische, positiv definite Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, sodass

$$\forall v, w \in V :\ \langle v, w\rangle = [v]_\mathcal{B}^T A [w]_\mathcal{B}.$$

Es gilt nach Voraussetzung

$$[v]_\mathcal{B}^T AB[w]_\mathcal{B} = [v]_\mathcal{B}^T A[Tw]_\mathcal{B} = \langle v, Tw\rangle \overset{T=T^*}{=} \langle Tv, w\rangle$$

Siehe nächstes Blatt!

$$=[Tv]_{\mathcal{B}}^T A[w]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}}^T B^T A[w]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}}^T BA[w]_{\mathcal{B}}.$$

Dies impliziert, dass $AB = BA$ gilt, denn die Surjektivität von $v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$ impliziert

$$(BA)_{ij} = e_i^T BAe_j = e_i^T ABe_j = (AB)_{ij}$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$. Da A, B positiv definit sind, ist also AB positiv definit, was in Aufgabe 5.a) gezeigt wurde, und es folgt

$$\forall v \in V \setminus \{0\} : \beta_T(v, v) = \langle v, Tv \rangle = [v]_{\mathcal{B}}^T AB[v]_{\mathcal{B}} > 0.$$

Somit ist β_T ein inneres Produkt.