Serie 22:
Symmetrische Bilinearformen & quadratische Formen

1. **a)** Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right) \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ und sei $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\beta(u, v) := u^T A v \quad (u, v \in \mathbb{R}^2).$$

Bestimmen Sie eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$, sodass β bezüglich $\mathcal{B}$ eine Darstellungsmatrix der Form $\left(\begin{smallmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{smallmatrix}\right)$ besitzt.

b) Diagonalisieren Sie die zur symmetrischen reellen Matrix A gehörige Bilinearform, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

d.h. finden Sie eine Matrix $Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, sodass $Q^T A Q$ eine Diagonalmatrix ist. Zeigen Sie auf zwei Arten, dass die zugehörige Bilinearform positiv definit ist.

2. Bestimmen Sie die Quadriken in $\mathbb{R}^3$.

3. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, in dem $2 \neq 0$ gilt, und sei $Q : V \to \mathbb{K}$.

a) Zeigen Sie, dass (i) und (ii) äquivalent sind:

(i) Es gelten:

I. $Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v)$ für alle $v \in V$ und für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, d.h. Q ist homogen vom Grad 2.

Bitte wenden!

II. Die Abbildung $\beta_Q : V \times V \to \mathbb{K}$,

$$\beta_Q(v, w) := \frac{1}{2}\big(Q(v + w) - Q(v) - Q(w)\big),$$

ist bilinear.

(ii) Es existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V und eine symmetrische Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, sodass gilt

$$\forall v \in V : Q(v) = [v]_{\mathcal{B}}^T A [v]_{\mathcal{B}}.$$

Bemerkung: Im Folgenden bezeichnen wir mit einer quadratischen Form auf V eine Abbildung $Q : V \to \mathbb{K}$, die eine dieser äquivalenten Eigenschaften erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass die Menge der quadratischen Formen auf V ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(V, \mathbb{K})$ ist und dass die Abbildung $Q \mapsto \beta_Q$ einen Isomorphismus zwischen dem Vektorraum der quadratischen Formen auf V und dem Vektorraum der symmetrischen Bilinearformen auf $V \times V$ definiert.

4. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und in $\mathbb{K}$ gelte $2 \neq 0$ und sei $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform. Ein Unterraum $W \subseteq V$ heisst nicht ausgeartet, falls $\beta|_{W\times W}$ nicht ausgeartet ist (vgl. Serie 21).

a) Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum und definiere

$$W^\beta := \{v \in V \mid \forall w \in W : \beta(v, w) = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass $V = W \oplus W^\beta$ genau dann gilt, wenn W ein nicht ausgearteter Unterraum ist.

b) Sei β nicht-ausgeartet. Zeigen Sie mittels Induktion über $\dim(V)$, dass eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V existiert, sodass $\beta(v_i, v_j) = 0$ genau dann, wenn $i \neq j$.

Bemerkung: V besitzt also eine "orthogonale" Basis bezüglich β. Im Allgemeinen können wir nicht annehmen, dass $\beta(v_i, v_j) = \pm\delta_{ij}$ (Orthonormalität), da für allgemeine Körper $\mathbb{K}$ sowohl $\sqrt{\beta(v_i, v_i)} \notin \mathbb{K}$ als auch $\sqrt{-\beta(v_i, v_i)} \notin \mathbb{K}$ gelten kann.

5. **a)** Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, positiv definit, sodass $AB = BA$ gilt. Zeigen Sie, dass AB positiv definit ist.

$^\heartsuit$**b)** Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und definiere die Abbildung $\beta_T : V \times V \to \mathbb{R}$ durch $\beta_T(v, w) := \langle v, Tw\rangle$.

(i) Zeigen Sie, dass β_T bilinear ist.

(ii) Zeigen Sie, dass β_T genau dann symmetrisch ist, wenn T selbstadjungiert ist.

(iii) Sei V endlichdimensional. Zeigen Sie, dass β_T genau dann ein inneres Produkt ist, wenn T selbstadjungiert ist und eine Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, sodass $[T]_{\mathcal{B}}$ symmetrisch und positiv definit ist.

Siehe nächstes Blatt!

6. Online-Abgabe

1. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ symmetrisch, dann ist A kongruent zu einer Diagonalmatrix.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

2. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, sodass $A_{ij} > 0$ für alle $1 \le i, j \le n$. Dann ist A positiv definit.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

3. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, positiv definit. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) A^2 ist positiv definit.

(b) A^{-1} ist positiv definit.

(c) Keine der Aussagen ist richtig.

4. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ eine Diagonalmatrix. Dann ist A kongruent zu jeder anderen Diagonalmatrix, mit denselben Diagonaleinträgen (bis auf Permutation der Indizes).

(a) Richtig.

(b) Falsch.

Bitte wenden!

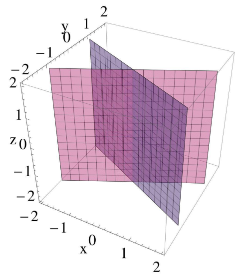
5. Sei β die Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\beta((x,y,z),(x',y',z')) = xx' - 4yy'.$$

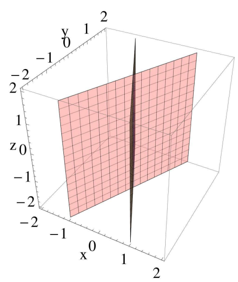
Sei Q die durch β induzierte quadratische Form auf $\mathbb{R}^3$, d.h. $Q(v) = \beta(v,v)$. Welches der folgenden Bilder gibt eine Darstellung der Quadrik

$$X_{Q,0} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Q(v) = 0\}?$$

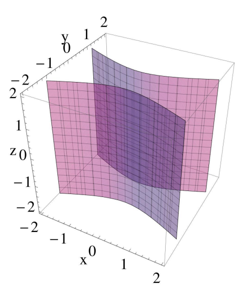
(a) 1



(b) 2



(c) 3



Siehe nächstes Blatt!

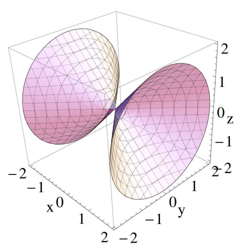
6. Sei β die Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\beta((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + yy' - zz'.$$

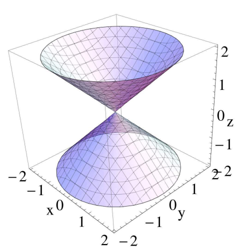
Sei Q die durch β induzierte quadratische Form. Welches der folgenden Bilder gibt eine Darstellung der Quadrik

$$X_{Q,0} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Q(v) = 0\}?$$

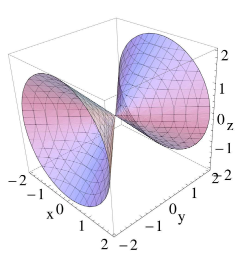
(a) 1



(b) 2



(c) 3



Bitte wenden!

7. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Betrachte auf $\mathbb{K}^2$ die quadratische Form $Q(x, y) = x^2 - 2y^2$. Dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{K}^2$, sodass für die Koordinaten $(\tilde{x}, \tilde{y})$ von (x, y) bezüglich $\mathcal{B}$ gilt:

(a) $Q(x, y) = \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$?

(b) $Q(x, y) = \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

(c) $Q(x, y) = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

(d) $Q(x, y) = \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

(e) $Q(x, y) = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

8. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Betrachte auf $\mathbb{K}^2$ die quadratische Form $Q(x, y) = xy$. Dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$, sodass für die Koordinaten $(\tilde{x}, \tilde{y})$ von (x, y) bezüglich $\mathcal{B}$ gilt

(a) $Q(x, y) = \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

(b) $Q(x, y) = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

(c) $Q(x, y) = \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

(d) $Q(x, y) = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

9. *Prüfung Winter 2018:* Jede Bilinearform auf einem reellen Vektorraum definiert ein inneres Produkt.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

10. *Prüfung Winter 2018:* Jedes innere Produkt auf einem reellen Vektorraum definiert eine Bilinearform.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Siehe nächstes Blatt!

11. *Prüfung Winter 2018:* Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und positiv definit. Dann ist $\operatorname{tr}(A) > 0$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

12. *Prüfung Winter 2018:* Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und positiv definit. Dann ist A^{-1} auch positiv definit.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

13. *Prüfung Sommer 2017:* Sei Q eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$. Die Darstellungsmatrix von Q ist genau dann invertierbar, wenn sie positiv oder negativ definit ist.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

14. *Prüfung Sommer 2017:* Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, positiv definit. Dann ist $A + B$ positiv definit.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

15. *Prüfung Sommer 2017:* Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei β eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf V. Dann ist die Abbildung $V \mapsto V^*$, $v \mapsto \beta(v, \cdot)$ ein Isomorphismus.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Bitte wenden!

16. Die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|_\infty^2 = \max\{|v_i|; 1 \leq i \leq n\}^2$$

ist eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Donnerstag, den 19. April, vor 14:30 Uhr im HG J 68 in einem der Fächer beschriftet mit Abgabe.