Lösung 24: Orthogonale Abbildungen, Jordan Normalform (Teil 1)

1. a) Sei T eine Reflexion, und sei $v \in V$ normiert (i.e. $\|v\| = 1$), sodass $T|_{\{v\}^\perp} = I_{\{v\}^\perp}$. Um zu zeigen, dass T orthogonal ist, zeigen wir, dass $T^{-1} = T^*$, da T^{-1} besonders leicht zu bestimmen ist. Alternativ könnte man auch direkt überprüfen, dass T die definierende Eigenschaft einer orthogonalen Abbildung besitzt. Nach Anwendung des Gram-Schmidt Verfahrens auf $\{v\}^\perp$ existiert eine ONB $(v_1, \ldots, v_n)$ von V, sodass

$$T(v_i) = \begin{cases} -v_i & \text{falls } i = 1 \\ v_i & \text{sonst.} \end{cases}$$

Falls $i = 1$, dann ist

$$\langle T(v_i), v_j \rangle = -\langle v_i, v_j \rangle = -\delta_{ij} = \langle v_i, T(v_j) \rangle.$$

Andernfalls ist

$$\langle T(v_i), v_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \langle v_i, T(v_j) \rangle.$$

Somit ist $T^* = T$. Andererseits ist $T^2(v_i) = v_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ und folglich $T^* = T^{-1}$ wie gewünscht.

Sei nun T eine Rotation. Sei $W = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$, wobei (v_1, v_2) eine ONB von W ist, und sei

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \cos\vartheta\, v_1 + \sin\vartheta\, v_2 \\ T(v_2) &= -\sin\vartheta\, v_1 + \cos\vartheta\, v_2 \end{aligned}$$

Bitte wenden!

sowie $T|_{W^\perp} = I_{W^\perp}$. Nach Anwendung von Gram-Schmidt auf $W^\perp$ erhalten wir eine ONB $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V, sodass $T(v_i) = v_i$ für alle $2 < i \leq n$. Insbesondere ist

$$[T]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}[T]_\mathcal{B}^T[T]_\mathcal{B} &= \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\vartheta + (-1)^2\sin^2\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} = I_n.\end{aligned}$$

Da $\mathcal{B}$ eine ONB von V ist, folgt

$$[T^*]_\mathcal{B} \overset{(\mathcal{B}\text{ ONB})}{=} [T]_\mathcal{B}^T = [T]_\mathcal{B}^{-1} \overset{([ST]_\mathcal{B} = [S]_\mathcal{B}[T]_\mathcal{B})}{=} [T^{-1}]_\mathcal{B}$$

und folglich ist $T^* = T^{-1}$, da $[\cdot]_\mathcal{B} : \mathrm{End}(V) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ injektiv ist. Also ist T orthogonal.

b) 1. Sei $\mathcal{B}$ eine ONB von V, dann gilt $[T]_\mathcal{B}^T[T]_\mathcal{B} = I_2$. Sei $[T]_\mathcal{B} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, dann folgt

$$I_2 = [T]_\mathcal{B}^T[T]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere existieren $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$, sodass

$$a = \cos\varphi,\ b = \sin\psi,\ c = \sin\varphi,\ d = \cos\psi.$$

Zudem ist

$$\begin{aligned} 0 = ab + cd &= \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi \\ &= \sin(\varphi + \psi) \end{aligned}$$

und folglich $\psi = -\varphi + k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $k \in \{0, 1\}$ ist. Falls $\psi = -\varphi$, dann ist

$$[T]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist mit $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ folglich

$$T(v_1) = \cos\varphi\, v_1 + \sin\varphi\, v_2,$$

Siehe nächstes Blatt!

$$T(v_2) = -\sin\varphi\, v_1 + \cos\varphi\, v_2.$$

Somit ist T eine Rotation.
Andernfalls ist
$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$
Das charakteristische Polynom von T ist also
$$\mathrm{char}_T(X) = -(\cos\varphi - X)(\cos\varphi + X) - \sin^2\varphi = X^2 - 1$$
und somit sind die Eigenwerte von T gleich 1 und -1.
Da $[T]_{\mathcal{B}}$ symmetrisch ist, ist andererseits $[T]_{\mathcal{B}}$ orthogonal diagonalisierbar, d.h. es existiert eine orthogonale Matrix $Q \in \mathrm{O}(2)$, sodass
$$Q^T[T]_{\mathcal{B}}Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$
und da Eigenwerte invariant sind unter Ähnlichkeit, gilt o.B.d.A. $1 = \lambda_1 = -\lambda_2$. Da Q invertierbar ist, ist $Q = [I_V]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ für eine Basis $\mathcal{C}$ von V. Insbesondere folgt also wegen $Q^T = Q^{-1}$, dass
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = Q^T[T]_{\mathcal{B}}Q = [T]_{\mathcal{C}}$$
und somit ist T eine Reflexion.
Obige Rechnung zeigt auch folgendes: Wenn T eine Reflexion ist, dann ist $\det(T) = -1$ (setze $X = 0$). Falls andererseits T keine Reflexion ist, dann ist T wie gezeigt eine Rotation, und es folgt
$$\det(T) = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$
Also ist $\det(T) = -1$ genau dann, wenn T eine Reflexion ist. Analog argumentiert man dass $\det(T) = 1$ genau dann gilt, wenn T eine Rotation ist.

2. Seien S eine Rotation und T eine Reflexion. Dann ist
$$\det(ST) = \det(TS) = \det(T)\det(S) = -1$$
und somit sind ST und TS nach vorangehender Aussage Reflexionen.

c) Nach Umbenennung der Unterräume können wir annehmen, dass $1 \leq k \leq m$ so gewählt ist, dass $\dim(W_i) = 1$ genau dann gilt, wenn $1 \leq i \leq k$ ist. Im Folgenden seien $r = m - k$. Nach Voraussetzung ist $\dim(V) = k + 2r$. Sei $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_k, v_1, w_1, \ldots, v_r, w_r)$ eine ONB von V, sodass
$$W_i = \begin{cases} \mathrm{span}\{u_i\} & \text{falls } 1 \leq i \leq k \\ \mathrm{span}\{v_{i-k}, w_{i-k}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Bitte wenden!

gilt. Dann ist die Darstellungsmatrix von T bezüglich $\mathcal{B}$ eine Blockdiagonalmatrix von der Form

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_k & & & \\ & & & D_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & D_r \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ und $D_1, \ldots, D_r \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ sind. Da T orthogonal und da $\mathcal{B}$ eine ONB ist, folgt $[T]_{\mathcal{B}}^T = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}$. Folglich gilt $\alpha_i \in \{\pm 1\}$ und $D_i \in O(2)$. Es ist

$$\det(T) = \alpha_1 \cdots \alpha_k \det(D_1) \cdots \det(D_r).$$

Wir wissen aus Aufgabe 1.a), dass α_i bzw. $\det(D_i)$ genau dann gleich -1 ist, wenn $T|_{W_i}$ eine Reflexion ist, und ansonsten ist α_i bzw. $\det(D_i)$ gleich 1. Somit ist

$$\begin{aligned} \det(T) &= \left(\prod_{\substack{1 \le i \le k \\ T|_{W_i} \text{ Reflexion}}} \alpha_i \right) \left(\prod_{\substack{k < i \le m \\ T|_{W_i} \text{ Reflexion}}} \det(D_i) \right) \\ &= \left(\prod_{\substack{1 \le i \le k \\ T|_{W_i} \text{ Reflexion}}} (-1) \right) \left(\prod_{\substack{k < i \le m \\ T|_{W_i} \text{ Reflexion}}} (-1) \right) \\ &= \prod_{\substack{1 \le i \le m \\ T|_{W_i} \text{ Reflexion}}} (-1) = (-1)^s. \end{aligned}$$

2. **a)** Seien $W_1, \ldots, W_m$ wie in der Voraussetzung zu Teilaufgabe 1.c) und nehmen wir zudem an, dass $1 \le k \le l \le m$ gegeben sind, sodass $\dim(W_i) = 1$ genau dann gilt, wenn $1 \le i \le k$ ist, und dass für $k < i \le m$ die Restriktion $T|_{W_i}$ genau dann eine Reflexion ist, wenn $k < i \le l$ gilt. Angenommen $k < i \le l$, dann existiert eine ONB (v_i, w_i) von W_i, sodass $T(v_i) = -v_i$ und $T(w_i) = w_i$ gelten. Insbesondere ist

$$W_i = \operatorname{span}\{v_i\} \oplus \operatorname{span}\{w_i\}$$

eine orthogonale Zerlegung von W_i in T-invariante Unterräume. Nachdem wir diese Zerlegung für alle $k < i \le l$ vorgenommen haben, erhalten wir eine neue Zerlegung von V von der Form

$$V = W_1' \oplus \cdots \oplus W_{k'}' \oplus \cdots \oplus W_{m'}'$$

Siehe nächstes Blatt!

in T-invariante Unterräume, sodass für alle $1 \leq i \leq k'$ gilt $\dim(W_i') = 1$ und für alle $k' < i \leq m'$ gilt $\dim(W_i') = 2$ und $T|_{W_i'}$ ist eine Rotation.

Im Folgenden gehen wir, zwecks Effizienz der Notation, davon aus, dass die Zerlegung von Anfang an so gewählt war. Wir wollen nun zeigen, dass Punkt 2 der Aussage für eine Zerlegung von V und Restriktion von T auf die in der Zerlegung auftauchenden Unterräume erfüllt ist. Die anderen Punkte folgen dann relativ leicht, wie wir am Schluss argumentieren werden. Sei

$$I = \{1 \leq i \leq k \mid T|_{W_i} \text{ ist eine Reflexion}\}$$

und $J = \{1, \dots, k\} \setminus I$. Auf einem eindimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum ist jede lineare Abbildung von der Form $v \mapsto \lambda v$ mit $\lambda \in \mathbb{K}$ und es ist $\det(v \mapsto \lambda v) = \lambda$. Insbesondere ist

$$T|_{W_i} = \begin{cases} I_{W_i} & \text{falls } i \in J \\ -I_{W_i} & \text{falls } i \in I \end{cases}$$

Falls $I = \emptyset$, dann ist Punkt 2 der Aussage erfüllt. Sei also $I \neq \emptyset$. Die Idee ist wie folgt: Seien $i_1, i_2 \in I$, dann ist $T|_{W_{i_1} \oplus W_{i_2}} = -I_{W_{i_1} \oplus W_{i_2}}$ eine Rotation um Winkel π. Wir fassen soviele Paare wie möglich zusammen und erhalten am Schluss maximal ein i, worauf $T|_{W_i}$ noch eine Reflexion ist.

Formaler argumentiert, können wir nach Umbenennung annehmen, dass $I = \{1, \dots, l\}$ für ein $1 \leq l \leq k$ und $J = \{l+1, \dots, k\}$. Sei

$$r = \begin{cases} \frac{l}{2} & \text{falls } l \equiv 0 \text{ mod } 2 \\ \frac{l-1}{2} & \text{sonst} \end{cases}$$

und definiere für $1 \leq i \leq r$ den Unterraum $W_i' = W_{2i} \oplus W_{2i+1}$. Diese Unterräume sind paarweise orthogonale Unterräume von $W_1 \oplus \cdots \oplus W_l$ und somit ist

$$\dim(W_1' \oplus \cdots \oplus W_r') = l - 1$$

und $T|_{W_i'}$ ist eine Rotation. Es gilt

$$V = W_1 \oplus W_1' \oplus W_r' \oplus W_{l+1} \cdots \oplus W_m,$$

und $T|_{W_i}$ ist eine Rotation für alle $l < i \leq m$ nach Voraussetzung. Nach Umbenennung haben wir also eine Zerlegung

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$$

gefunden, sodass $T|_{W_1}$ eine Reflexion ist, und $T|_{W_i}$ für alle $1 < i \leq m$ eine Rotation ist.

Bitte wenden!

Es bleibt, explizit die T_i zu konstruieren und zu zeigen, dass alle Aussagen gelten. Sei $1 \leq i \leq m$, dann definieren wir T_i durch

$$T_i|_{W_j} = \begin{cases} T|_{W_i} & \text{falls } j = i \\ I_{W_j} & \text{sonst} \end{cases}$$

und diese Abbildungen sind alle wohldefiniert, da V die direkte Summe der W_j ist. Formaler wählt man eine ONB $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_k, v_1, w_1, \ldots, v_r, w_r)$ von V wie oben, d.h.

$$W_i = \begin{cases} \operatorname{span}\{u_i\} & \text{falls } \dim(W_i) = 1 \\ \operatorname{span}\{v_{i-k}, w_{i-k}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

und definiert $T_i(u_j) = T|_{W_i}(u_j)$ falls $i = j$ und $T_i(u_j) = u_j$ sonst u.s.w. für v_j, w_j.

Punkt 1 der Aussage folgt aus der Konstruktion und ebenfalls nach Konstruktion ist keine der Abbildungen $T_2, \ldots, T_m$ eine Reflexion und somit gilt Punkt 2 der Aussage. Punkt 3 folgt aus der Tatsache, dass $T_iT_j|_{W_k} = T_jT_i|_{W_k}$ für alle $1 \leq k \leq m$ gilt, da die Identität mit allen Endomorphismen kommutiert. Teil 4 gilt aufgrund der Tatsache, dass nach Konstruktion

$$\forall v \in \mathcal{B} : \ T_1 \cdots T_m(v) = T(v),$$

denn $T_1 \cdots T_m(v) = T|_{W_i}(v)$ für das eindeutige $1 \leq i \leq m$ mit $v \in W_i$, und aufgrund der Tatsache, dass jede lineare Abbildung durch ihre Wirkung auf einer Basis vollständig bestimmt ist. Punkt 5 folgt aus

$$\det(T) = \det(T_1) \cdots \det(T_m) = \det(T_1)$$

nach Punkt 2.

b) Sei $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$ wie in Teilaufgabe a) gewählt, d.h. $T|_{W_i}$ ist eine Rotation für alle $1 < i \leq m$. Wir betonen an dieser Stelle, dass nach Definition die einzige Rotation auf einem eindimensionalen Vektorraum die Identität ist. Man beachte, dass für je zwei eindimensionale Unterräume W_{i_1}, W_{i_2} worauf die Restriktionen $T|_{W_{i_1}}$ bzw. $T|_{W_{i_2}}$ Rotationen sind, auch $W_{i_1} \oplus W_{i_2}$ ein Unterraum ist, worauf $T|_{W_{i_1} \oplus W_{i_2}}$ eine Rotation ist (da die Identität eine Rotation ist). Folglich können wir annehmen, dass $\dim(W_i) = 2$ für alle $2 < i \leq m$ ist, wobei wir W_2 ausschliessen, da wir nicht wissen, ob $\dim(W_2 \oplus \cdots \oplus W_m)$ gerade ist. Im Folgenden seien $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$ ONB von $W_1, \ldots, W_m$. Wir wissen aus der Vorlesung, dass die geordnete Menge $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_m$ erhalten aus "Aneinanderhängen" der Basen eine ONB von V ist. Es gilt nach Teilaufgabe a)

$$[T]_{\mathcal{B}} = [T_1]_{\mathcal{B}} \cdots [T_m]_{\mathcal{B}}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$= \prod_{i=1}^{m} \begin{pmatrix} I_{\dim(W_1 \oplus W_{i-1})} & 0 & 0 \\ 0 & [T|_{W_i}]_{\mathcal{B}_i} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\dim(W_{i+1} \oplus \cdots \oplus W_m)} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} [T|_{W_1}]_{\mathcal{B}_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & [T|_{W_m}]_{\mathcal{B}_m} \end{pmatrix}.$$

Da die $T|_{W_2}, \ldots, T|_{W_m}$ alles Rotationen sind, und da wir angenommen haben, dass $\dim(W_i) = 2$ für alle $i > 2$, wissen wir aus Aufgabe 1.b), dass

$$[T|_{W_i}]_{\mathcal{B}_i} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_i & -\sin\vartheta_i \\ \sin\vartheta_i & \cos\vartheta_i \end{pmatrix}$$

für ein $\vartheta_i \in \mathbb{R}$ gilt. Falls $\dim(W_2) = 2$, dann gilt dieselbe Aussage auch für $[T|_{W_2}]_{\mathcal{B}_2}$. Andernfalls ist $\dim(W_2) = 1$ und somit folgt $[T|_{W_2}]_{\mathcal{B}_2} = (1)$ wegen $\det(T|_{W_2}) = 1$. Schliesslich gilt es noch folgende Fälle zu unterscheiden: Falls $T|_{W_1}$ eine Rotation ist, dann gelten dieselben Aussagen auch für $[T|_{W_1}]_{\mathcal{B}_1}$, andernfalls ist nach Konstruktion $\dim(W_1) = 1$ und somit $[T|_{W_1}]_{\mathcal{B}_1} = (-1)$. All diese Fälle zusammen beweisen die Aussage.

Nach Konstruktion sind alle 1×1-Diagonalblöcke gleich 1, ausser möglicherweise $[T|_{W_1}]_{\mathcal{B}_1}$. Dieser Block ist genau dann nicht gleich 1, wenn $T|_{W_1}$ eine Reflexion ist und somit folgt die Aussage aus der Tatsache

$$\det(T) = \det([T]_{\mathcal{B}}) = \det([T|_{W_1}]_{\mathcal{B}_1}) \cdots \det([T|_{W_m}]_{\mathcal{B}_m}) = \det([T|_{W_1}]_{\mathcal{B}_1}).$$

c) Per definitionem ist $\mathrm{O}(3) \subset M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ die Menge der Matrizen A, sodass L_A eine orthogonale Abbildung ist. Aus Aufgabe 2.b) wissen wir, dass für jedes $A \in \mathrm{O}(3)$ eine ONB $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ existiert, sodass

$$A = [L_A]_{\mathcal{E}_3} \sim [L_A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

ist, wobei $\sim$ das Symbol für Ähnlichkeit sei und $\lambda \in \{\pm 1\}$ und $a^2 + b^2 = 1$ ist. Es folgt, dass ein $\vartheta \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $a = \cos\vartheta$ und $b = \sin\vartheta$ ist. Falls $A \in \mathrm{SO}(3)$ ist, dann folgt aus

$$\det(A) = \det([L_A]_{\mathcal{B}}) = \lambda(a^2 + b^2) = \lambda,$$

dass $\lambda = 1$ ist, und folglich ist A ähnlich zu einer Matrix

$$[L_A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

3. **a)** Man bemerkt, dass das Aufheben des Balles und – nach Ablauf der ersten Halbzeit – das erneute am selben Ort Ablegen des Balles die Distanzen der Punkte auf der Oberfläche sowie das Zentrum des Balles erhält.

Unter Verwendung des angegebenen Theorems finden wir eine orthogonale Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sodass wir den Ball zu Beginn der ersten Halbzeit mit S^2 und zu Beginn der zweiten Halbzeit mit $T(S^2)$ identifizieren können. Wir wissen aus Aufgabe 2., dass T eine Komposition von Rotationen und maximal einer Reflexion ist.

Es ist klar, dass man nicht eine Reflexion auf einen Fussball anwenden kann, ohne ihn dabei zu zerstören. Jede orthogonale Abbildung auf $\mathbb{R}^3$ die ein Produkt ausschliesslich von Rotationen ist, besitzt einen Eigenvektor $v \in S^2$ zum Eigenwert 1 wegen Aufgabe 2. b). Insbesondere sind also $T(v) = v$ und $T(-v) = -v$ zwei Punkte auf dem Fussball, die nach Ablauf der ersten Halbzeit wieder auf sich selber zu liegen kommen.

b) Man berechnet

$$\begin{aligned}
\|v\|^2 - 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2 =& \langle v - w, v - w\rangle \\
=& \|v - w\|^2 \\
=& \|f(v) - f(w)\|^2 \\
=& \langle f(v) - f(w), f(v) - f(w)\rangle \\
=& \|f(v)\|^2 - 2\langle f(v), f(w)\rangle + \|f(w)\|^2 \\
=& \|v\|^2 - 2\langle f(v), f(w)\rangle + \|w\|^2
\end{aligned}$$

und folglich ist

$$\langle v, w\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle.$$

Wir sollten an dieser Stelle betonen, dass $\|f(v)\| = \|v\|$ nicht eine Konsequenz der isometrischen Eigenschaft von f ist, sondern eine Konsequenz der Voraussetzung $f : S^2 \to S^2$ ist, denn daraus folgt $\|v\| = 1 = \|f(v)\|$.

c) Es folgt aus Teilaufgabe b), dass das Bild von $\mathcal{E}_3$ unter f eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ist. Folglich gilt nach Teilaufgabe b)

$$f(v) = \sum_{i=1}^{3} \langle f(v), f(e_i)\rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^{3} \langle v, e_i\rangle f(e_i).$$

Die Abbildung $v \mapsto T(v) = \sum_{i=1}^{3} \langle v, e_i\rangle f(e_i)$ ist auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert und linear und liefert eine lineare Fortsetzung von f auf ganz $\mathbb{R}^3$. Zudem ist jede lineare Fortsetzung durch $T(e_i) = f(e_i)$ vollständig bestimmt. Es bleibt also nur zu zeigen, dass T orthogonal ist. Es gilt

$$\langle T(v), T(w)\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{3} \langle v, e_i\rangle f(e_i), \sum_{j=1}^{3} \langle w, e_j\rangle f(e_j) \right\rangle$$

Siehe nächstes Blatt!

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{3} \langle v, e_i\rangle \langle w, e_j\rangle \langle f(e_i), f(e_j)\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} \langle v, e_i\rangle \langle w, e_j\rangle \langle e_i, e_j\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{3} \langle v, e_i\rangle e_i, \sum_{j=1}^{3} \langle w, e_j\rangle e_j \right\rangle = \langle v, w\rangle
\end{aligned}
$$

und somit ist T orthogonal.

d) Wir wissen, dass die Erweiterung T eine Komposition von Rotationen und maximal einer Reflexion ist. Wie in der Beweisskizze erklärt, kann in der Zerlegung von T keine Reflexion vorkommen, ausser der Ball wird zerstört (was implizit ausgeschlossen ist). Aus Aufgabe 2. b) wissen wir, dass eine ONB $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ existiert, sodass

$$
[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}
$$

ist. Da T ein Produkt von Rotationen ist, gilt

$$
1 = \det(T) = \lambda(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) = \lambda
$$

und somit besitzt T einen Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ zum Eigenwert 1. Es sind $\frac{v}{\|v\|}, -\frac{v}{\|v\|} \in S^2$ ebenfalls Eigenvektoren von T zum Eigenwert 1, die in S^2 liegen, und also folgt die Behauptung.

4. Wir verwenden Theorem 5 aus §5.2: ein Endomorphismus $T \in \mathrm{End}(V)$ ist genau dann diagonalisierbar ist, wenn für alle $\lambda \in \sigma(T)$ gilt $\dim E_\lambda = m_\lambda(T)$, und $\sum_{\lambda\in\sigma(T)} m_\lambda(T) = \dim V$. Hier ist $m_\lambda(T)$ die algebraische Multiplizität von λ bezüglich T.

1. ⇒ 2.: Angenommen T ist diagonalisierbar, dann ist

$$
V = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(T)} E_\lambda \subset \bigoplus_{\Lambda\in\sigma(T)} K_\lambda \subset V
$$

wegen $E_\lambda \subset K_\lambda$ für alle $\lambda \in \sigma(T)$ und insbesondere

$$
\dim(V) = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \dim(E_\lambda) \leq \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \dim(K_\lambda) \leq \dim(V).
$$

Also ist $\dim(E_\lambda) = \dim(K_\lambda)$ für alle $\lambda \in \sigma(T)$ und somit $E_\lambda = K_\lambda$ für alle $\lambda \in \sigma(T)$.

Bitte wenden!

2. ⇒ 1.: Aus der Annahme folgt $m_\lambda(T) = \dim K_\lambda = \dim E_\lambda$. Da $\mathrm{char}_T(X)$ nach Voraussetzung in Linearfaktoren zerfällt, ist $\sum_{\lambda\in\sigma(T)} m_\lambda(T) = \dim V$, sprich

$$\dim(\bigoplus_{\lambda\in\sigma(T)} E_\lambda) = \dim(V)$$

und also $\bigoplus_{\lambda\in\sigma(T)} E_\lambda = V$ und somit ist T diagonalisierbar.

5. Seien $v, w \in V \setminus \{0\}$ und $p, q \in \mathbb{N}$, sodass

$$\begin{aligned}\gamma_1 =&\big((T-\lambda I)^{p-1}(v), \ldots, v\big),\\ \gamma_2 =&\big((T-\lambda I)^{q-1}(w), \ldots, w\big),\end{aligned}$$

und sei vorausgesetzt, dass $(T-\lambda I)^{q-1}(w) \neq (T-\lambda I)^{p-1}(v)$. Angenommen, die Aussage ist falsch, und $u \in \gamma_1 \cap \gamma_2$. Angenommen

$$u = (T-\lambda I)^k(v) = (T-\lambda I)^l(w)$$

mit $0 \leq k < p$ und $0 \leq l < q$. Für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt folglich

$$(T-\lambda I)^{k+r}(v) = (T-\lambda I)^r(u) = (T-\lambda I)^{l+r}(w).$$

Insbesondere folgt aus der Minimalität von p und q, dass $(T-\lambda I)^r(u) \neq 0$ genau dann, wenn $r < p-k$ bzw. $r < q-l$ und also ist $p-k = q-l$. Es folgt

$$(T-\lambda I)^{p-1}(v) = (T-\lambda I)^{p-k-1}(u) = (T-\lambda I)^{q-l-1}(w) = (T-\lambda I)^{q-1}(w),$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.