Lösung 25:
Jordan Normalform (Teil 2)

1. **a)** Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$\mathrm{char}_A(X) = X^2(1-X)(\mathrm{i}-X)$$

und da es in Linearfaktoren zerfällt (was über $\mathbb{C}$ natürlich immer gilt), ist A ähnlich zu einer Matrix in Jordan Normalform. Gegeben das charakteristische Polynom von A existieren die folgenden beiden Kandidaten J_1, J_2 für die Jordan Normalform:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Die Frage ist also, ob der Eigenwert 0 geometrische Multiplizität 1 oder 2 besitzt, da für die anderen Eigenwerte die algebraische Multiplizität 1 eine obere Schranke für die von unten durch 1 beschränkte geometrische Multiplizität liefert und diese somit vollständig bestimmt. Die geometrische Multiplizität des Eigenwerts 0 ist die Dimension des Kerns von A.

Da der Rang unter Ähnlichkeit erhalten bleibt und weil $\mathrm{Rang}(A) = 2$ ist, folgt $A \sim J_2$.

b) Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathrm{char}_A(X) =& (2-X)^3 + 2 - 3(2-X) \\ =& -X^3 + 6X^2 - 9X + 4 \end{aligned}$$

und somit

$$\mathrm{char}_A^{\mathbb{R}}(X) = -(X-1)^2(X-4),$$

Bitte wenden!

$$\mathrm{char}_A^{\mathbb{F}_3}(X) = -X^3 + 1 = -(X-1)^3,$$

im zweiten Falle weil $4 \equiv 1 \bmod 3$.

In beiden Fällen zerfällt das charakteristische Polynom in Linearfaktoren und somit ist A über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{F}_3$ äquivalent zu einer Matrix in Jordan Normalform.

Da alle Zeilen von $A - I_3$ identisch und von 0 verschieden sind, ist in beiden Fällen $\mathrm{Rang}(A - I_3) = 1$, und folglich ist $\dim \mathrm{Ker}(A - I_3) = 2$ sowohl für $\mathbb{R}$ als auch für $\mathbb{F}_3$. Es folgt

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{über } \mathbb{R}$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{über } \mathbb{F}_3$$

2. a) Angenommen $q = aX + b$ mit $a, b \in \mathbb{K}$ und $a \neq 0$. Seien $p, r \in \mathbb{K}[X]$, sodass $q = pr$ gilt. Wegen $1 = \deg(q) = \deg(p) + \deg(r)$ folgt $\deg(p) = 1$ und $\deg(r) = 0$ oder $\deg(p) = 0$ und $\deg(r) = 1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\deg(p) = 1$, und wir können annehmen p ist normiert. Dann ist $p = X + \lambda$. Wegen $q = pr$ folgt $q(-\lambda) = 0$ und somit $b = a\lambda$. Insbesondere ist also $q = a(X + \lambda)$ und somit $q = ap$.

b) Sei $p = aX + b$ mit $a, b \in \mathbb{K}^\times$. Nach Voraussetzung existiert $f \in \mathbb{K}[X]$ mit

$$qr = (aX + b)f = (X + a^{-1}b)(af).$$

Somit folgt, dass $X + \alpha$ mit $\alpha = a^{-1}b$ ein Teiler von qr ist. Es folgt

$$0 = (-\alpha + \alpha)(af)(-\alpha) = q(-\alpha)r(-\alpha)$$

und somit $q(-\alpha) = 0$ oder $r(-\alpha) = 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $q(-\alpha) = 0$. Aus dem Divisionsalgorithmus folgt $(X + \alpha) | q$ und somit $p | q$.

c) Aus $\deg(q) = \sum_{i=1}^n \deg(p_i) = n$ und $\deg(q) = \sum_{i=1}^m \deg(\tilde{p}_i) = m$ folgt $m = n$. Wir machen eine Induktion über den Grad von q.

Induktionsverankerung: Sei $\deg(q) = 1$ und $q = aX + b$ mit $a \neq 0$. Es gilt $q(-a^{-1}b) = 0$ und somit folgt aus $(X + a^{-1}b) | q$ auch $(X + a^{-1}b) | p_1$. Wegen $\deg(p_1) = 1$ besitzt p_1 höchstens eine Nullstelle in $\mathbb{K}$. Wegen $(X + a^{-1}b) | p_1$ ist $-a^{-1}b$ eine Nullstelle von p_1 und da p_1 normiert war, folgt $p_1 = X + a^{-1}b$. Insbesondere ist p_1 durch q eindeutig bestimmt und die Aussage folgt für den Fall $\deg(q) = 1$.

Siehe nächstes Blatt!

Induktionsschritt: Sei die Aussage bewiesen für nicht-konstante Polynome vom Grad höchstens $n-1$ und sei q ein Polynom vom Grad n und sei $n > 1$. Wir wissen aus der vorangehenden Teilaufgabe, dass p_n einen der Linearfaktoren $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n$ teilt. Nach Umbenennung können wir annehmen $p_n | \tilde{p}_n$ und aus der Induktionsverankerung folgt $p_n = \tilde{p}_n$. Es seien $q_1 = p_1 \cdots p_{n-1}$ und $q_2 = \tilde{p}_1 \cdots \tilde{p}_{n-1}$. Nach Voraussetzung gilt

$$0 = q - q = (q_1 - q_2)p_n$$

und somit

$$-\infty = \deg\big((q_1 - q_2)p_n\big) = \deg(q_1 - q_2) + \deg(p_n) = \deg(q_1 - q_2) + 1.$$

Es folgt $\deg(q_1 - q_2) = -\infty$ und somit $q_1 = q_2$. Somit ist $r = p_1 \cdots p_{n-1}$ ein Polynom vom Grad $n-1$ mit den Faktorisierungen

$$r = p_1 \cdots p_{n-1} = \tilde{p}_1 \cdots \tilde{p}_{n-1}$$

und aus der Induktionsannahme folgt die Behauptung.

d) Seien $f, g, h \in \mathbb{K}[X]$ gegeben, sodass $q = fr = p^n g$ sowie $r = p^m h$. Dann gilt insbesondere $q = p^m fh = p^n g$. Falls $m > n$, dann ist $g = p^{m-n} fh$, da $p^n g = p^n p^{m-n} fh$ und somit

$$-\infty = \deg\big((g - p^{m-n} fh)p^n\big) = \deg(g - p^{m-n} fh) + n \implies g = p^{m-n} fh$$

nach demselben Argument wie im Induktionsschritt in der vorangehenden Aufgabe. Wegen $m > n$ folgt somit aber $p | g$, und somit $p^{n+1} | q$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

3. a) Wir wissen, dass $\mathrm{char}_{L_A}(X) = \mathrm{char}_A(X)$ in Linearfaktoren zerfällt. Nach Korollar 1 in §9.2 wissen wir, dass eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{K}^n$ existiert, sodass $[L_A]_{\mathcal{B}}$ in Jordan Normalform ist. Insbesondere ist

$$A = [L_A]_{\mathcal{E}_n} = [I_{\mathbb{K}^n}]^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{B}} [L_A]_{\mathcal{B}} [I_{\mathbb{K}^n}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_n}$$

ähnlich zu einer Matrix in Jordan Normalform.

b) Wie in der Analysis gezeigt wurde, zerfällt jedes Polynom in $\mathbb{C}[X]$ in Linearfaktoren. Insbesondere ist jede Matrix ähnlich zu einer Matrix in Jordan Normalform. Sei $A = Q^{-1} J Q$ mit $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und J in Jordan Normalform. Man beachte: A und A^T sind genau dann ähnlich, wenn J und J^T ähnlich sind, da Ähnlichkeit eine Äquivalenzrelation ist. Es reicht also, zu zeigen dass J und J^T für J in Jordan Normalform ähnlich sind.Da J und J^T Blockdiagonalmatrizen mit Jordanblöcken bzw. deren Transponierten auf der Diagonalen sind, reicht es,

Bitte wenden!

den folgenden Fall zu zeigen: Seien $\lambda \in \mathbb{K}$ und $k \in \mathbb{N}$, dann sind $J_{k,\lambda}$ und $J_{k,\lambda}^T$ ähnlich, das wurde aber bereits in der Vorlesung gemacht. Sei nämlich R eine Blockdiagonalmatrix mit Blöcken R_i auf der Diagonalen, und seien Q_i invertierbare Matrizen der entsprechenden Grösse sowie $S_i = Q_i R_i Q_i^{-1}$, dann gilt für die Blockdiagonalmatrix Q mit Blöcken Q_i auf der Diagonalen, dass $QRQ^{-1} = S$, wobei S die Blockdiagonalmatrix mit Blöcken S_i auf der Diagonalen ist.

4. **a)** Sei $k \in \mathbb{N}$, dann schreiben wir $N_k = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_{k-1} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M_{k\times k}(\mathbb{K})$. Dann gilt $J_{k,\lambda} = \lambda I_k + N_k$ und da Diagonalmatrizen der Form αI_k mit allen Elementen in $M_{k\times k}(\mathbb{K})$ kommutieren, gilt

$$D_{k,\lambda} N_k = N_k D_{k,\lambda},$$

wobei $D_{k,\lambda} = \lambda I_k$. Nach Korollar 1 in §9.2 wissen wir, dass eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{K}^n$ existiert, sodass $[L_A]_{\mathcal{B}}$ in Jordan Normalform ist, d.h. es existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ sowie $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sodass

$$[L_A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J_{k_1,\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_{k_m,\lambda_m} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} D_{k_1,\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & D_{k_m,\lambda_m} \end{pmatrix}}_{=D} + \underbrace{\begin{pmatrix} N_{k_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & N_{k_m} \end{pmatrix}}_{N}$$

und es ist $DN = ND$, da das Produkt zweier Blockdiagonalmatrizen die Blockdiagonalmatrix mit den Produkten der entsprechenden Blöcke auf der Diagonalen ist.

b) Da über $\mathbb{C}$ jedes Polynom in Linearfaktoren zerfällt, ist Q ähnlich zu einer Matrix J in Jordan Normalform. Sei $Q = RJR^{-1}$, wobei $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist. Wir wissen aus Teilaufgabe a), dass $J = D + N$ für eine Diagonalmatrix D und eine strikte obere Dreiecksmatrix N ist, und dass D und N kommutieren. Da $D + N$ eine obere Dreiecksmatrix ist, folgt $0 \neq \det(Q) = \det(D)$ und somit sind alle Diagonaleinträge von D von 0 verschieden und D invertierbar.

Sei $U = D^{-1}J = I_n + D^{-1}N$. Dann ist U eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen alle gleich eins. Es folgt $DU = UD$ wie gewünscht. Die allgemeine Aussage folgt aus $Q = (RDR^{-1})(RUR^{-1})$ und der Tatsache, dass $(RUR - I_n)^k = R(U - I_n)^k R^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ und sei $\|\cdot\|$ eine beliebige (submultiplikative) Matrixnorm auf $M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Jede solche Norm induziert eine Norm auf $\mathbb{R}^{n^2}$ und somit sind alle diese Normen äquivalent, und alle im Folgenden gemachten Konvergenz- sowie Stetigkeitsaussagen sind unabhängig von der Wahl dieser Norm.

Es ist wegen der Submultiplikativität

$$\left\| \sum_{k=0}^{M} \tfrac{1}{k!} A^k - \sum_{k=0}^{N} \tfrac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=\min\{M,N\}+1}^{\max\{M,N\}} \tfrac{1}{k!} \|A^k\| \leq \sum_{k=\min\{M,N\}+1}^{\infty} \tfrac{1}{k!} \|A\|^k$$

Siehe nächstes Blatt!

für alle $M, N \in \mathbb{N}$ und da die Exponentialreihe auf ganz $\mathbb{R}$ absolut konvergiert, ist die Folge $S_N(A) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k$ also eine Cauchy-Folge. Somit existiert genau ein Grenzwert $\exp(A) = \lim_{N\to\infty} S_N(A)$.

d) Siehe Analysisskript, Kapitel 6.5.3.

e) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, dann ist $A = Q^{-1}JQ$ für $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und $J \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ in Jordan Normalform.

Sei $k \in \mathbb{N}$, dann ist $A^k = (Q^{-1}JQ)^k = Q^{-1}J^kQ$, und folglich für beliebige $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{N} Q^{-1}\frac{J^k}{k!}Q = Q^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{J^k}{k!}\Big)Q.$$

Wie vorher argumentiert wurde, konvergiert die Folge $S_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{J^k}{k!}$. Andererseits ist die Abbildung $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mapsto Q^{-1}XQ$ stetig, da $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und die Abbildung linear in X ist. Es folgt

$$\exp(A) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} = Q^{-1}\Big(\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{J^k}{k!}\Big)Q = Q^{-1}\exp(J)Q.$$

Schreibe $J = D + N$, wobei D eine Diagonalmatrix ist, und N eine strikte obere Dreiecksmatrix ist, sodass $DN = ND$ gilt. Wir finden

$$\begin{aligned}\exp(J) &= \exp(D+N) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} D^{k-l}N^l \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{D^k}{k!} + \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} D^{k-l}N^l\end{aligned}$$

wobei die Konvergenz des zweiten Summanden aus der Existenz von $\exp(D)$ und $\exp(J)$ folgt.

Beachte, dass für alle $r, s, t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Matrix D^rN^s eine obere Dreiecksmatrix ist und dass aus $DN = ND$ folgt

$$(D^rN^s)^t = D^{rt}N^{st},$$

sodass D^rN^s für $s \geq 1$ nilpotent ist. Insbesondere ist D^rN^s eine strikte obere Dreiecksmatrix und somit auch $\frac{1}{k!}\sum_{l=1}^{k}\binom{k}{l}D^{k-l}N^l$ für jedes $k \geq 0$, wobei wir hier die Konvention $\sum_{k\in\{\}} a_k = 0$ verwenden. Also ist

$$\exp(J) = \exp(D) + M,$$

Bitte wenden!

wobei $M \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ eine strikte obere Dreiecksmatrix ist. Für eine Diagonalmatrix wissen wir

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \exp(D) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

und folglich ist $\exp(J)$ eine obere Dreiecksmatrix und die Diagonaleinträge von $\exp(J)$ sind Exponentiale der Eigenwerte von J (bzw. von A bzw. von D). Es folgt wegen der Invarianz der Determinante und der Spur unter Ähnlichkeit

$$\begin{aligned}\det(\exp(A)) &= \det(\exp(J)) = \det(\exp(D) + M) = \prod_{i=1}^{n} \exp(D)_{ii} \\ &= \prod_{i=1}^{n} e^{D_{ii}} = \exp\Big(\sum_{i=1}^{n} D_{ii}\Big) = \exp\Big(\sum_{i=1}^{n} (D+N)_{ii}\Big) \\ &= \exp\Big(\sum_{i=1}^{n} J_{ii}\Big) = \exp(\operatorname{tr}(J)) = \exp(\operatorname{tr}(A)).\end{aligned}$$

Da $0 \notin \exp(\mathbb{C})$, folgt aus $\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A)) \neq 0$, dass $\exp(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Wir verwenden die vorangehende Teilaufgabe und erhalten

$$\exp(A)\exp(-A) = exp(A - A) = I_n = \exp(-A + A) = \exp(-A)\exp(A)$$

und somit ist $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

f) Wir wissen aus der Analysis, dass g innerhalb des Konvergenzradius stetig ist. Somit folgt der erste Teil der Aussage aus der Stetigkeit der Komposition der Potenzreihe und des Absolutbetrags. Es bleibt zu zeigen, dass $f \circ g$ eine Potenzreihe der beschriebenen Form ist. Wir wiederholen im Wesentlichen das Argument von `https://unapologetic.wordpress.com/2008/09/24/composition-of-power-series/`.

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0|$ gilt insbesondere

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_k b_m(k) z^m = \sum_{k=0}^{\infty} a_k g(z)^k.$$

Siehe nächstes Blatt!

Wie aus dem Hinweis hervorgeht, wollen wir die Summationsreihenfolge vertauschen. Hierfür verwenden wir die Übung zur Vertauschbarkeit der Summationsreihenfolge aus dem Analysisskript und zeigen, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|a_k b_m(k) z^m| < \infty.$$

Wir wissen nach wiederholter Anwendung der Cauchy-Produktformel (Analysisskript, Korollar 6.37), dass

$$|b_m(k)| = \Big|\sum_{l_1+\cdots+l_k=m} b_{l_1}\cdots b_{l_k}\Big| \le \sum_{l_1+\cdots+l_k=m} |b_{l_1}|\cdots|b_{l_k}|$$

und erhalten folglich

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|a_k b_m(k) z^m| &\le \sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l_1+\cdots+l_k=m}|b_{l_1}z^{l_1}|\cdots|b_{l_k}z^{l_k}| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\Big(\sum_{l=0}^{\infty}|b_l z^l|\Big)^k \\ &< \sum_{k=0}^{\infty}|a_k| R_f^k < \infty.\end{aligned}$$

Wir dürfen also die Summationsreihenfolge vertauschen und erhalten

$$|z-z_0| < \delta \implies f(g(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k g(z)^k = \sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_m(k)\Big) z^m$$

wie gewünscht.

g) Wir bemerken zuerst, dass gemäss der Diskussion in Abschnitt 8.1.2 im Analysisskript eine Umgebung U von $0 \in \mathbb{C}$ existiert, sodass für alle $z \in U$ gilt

$$\log(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{k+1}}{k} z^k.$$

Insbesondere ist die Komposition der Reihe aus dem Hinweis mit der Exponentialreihe identisch mit $1 + \mathrm{id}_C$ auf der Umgebung U. Letzteres ist ebenfalls eine Potenzreihe (nämlich die Potenzreihe $1+z$). Da Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius eindeutig durch ihre Koeffizienten bestimmt sind (siehe Analysisskript, Übung 8.13) und somit gilt in der Notation der vorangehenden Teilaufgabe $c_0 = c_1 = 1$ und $c_m = 0$ für alle $m \ge 2$.

Wir befolgen nun den Hinweis. Wir wissen, dass U ähnlich ist zu einer Matrix in J in Jordan Normalform, und dass $J = D + N$ ist für eine Diagonalmatrix

Bitte wenden!

D und eine strikte obere Dreiecksmatrix N. Da die Eigenwerte von J und U übereinstimmen, und da die Eigenwerte einer oberen Dreiecksmatrix genau die Diagonaleinträge sind, ist $D = I_n$ und somit $U - I_n$ ähnlich zu N. Wir nehmen der Einfachheit halber zuerst an, dass $U = D + N$ gilt.

Da N eine obere Dreiecksmatrix ist, ist N nilpotent, d.h. es existiert ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $N^{m+1} = 0$ ist, und somit ist $A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} N^k$ ein Polynom in N. Des Weiteren gilt wie eben argumentiert $\exp(A) = I_n + N = U$ und somit folgt der erste Teil der Aussage für den Fall einer oberen Dreiecksmatrix, deren Diagonaleinträge allesamt gleich 1 sind.

Falls die Aussage für $U = I_n + N$ wie oben stimmt, dann folgt sie sofort für Matrizen ähnlich zu Matrizen dieser Form. Sei nämlich $U = Q(I_n + N)Q^{-1}$, dann ist

$$(U - I_n^k) = QN^kQ^{-1}$$

und somit $U = Q\exp(A)Q^{-1} = \exp(QAQ^{-1})$.

Für die Surjektivität der Exponentialabbildung verwenden wir Teilaufgabe b). Sei $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, und schreibe $Q = DU$, wobei D diagonalisierbar und $U - I_n$ nilpotent ist. Wegen $\det(D) \neq 0$ und der Surjektivität der Exponentialabbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ existiert eine diagonalisierbare Matrix $H \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, sodass $D = \exp(H)$ und wir können H so wählen, dass $HU = UH$ gilt. Nach vorangehender Argumentation ist $U = \exp(A)$ für eine nilpotente Matrix A, wobei wir wegen $H(U - I_n) = (U - I_n)H$ annehmen können, dass $HA = AH$ gilt. Es folgt

$$Q = DU = exp(H)\exp(A) = \exp(H + A)$$

und somit die Behauptung.

h) Wir zeigen die Aussage nur für die Matrix $Q = DU$ wie in vorangehender Teilaufgabe, wobei wir annehmen, dass D eine Diagonalmatrix und U eine obere Dreiecksmatrix ist. Für allgemeine Matrizen folgt sie sofort aus der Ähnlichkeit, was Sie überprüfen sollten. Wir schreiben $D_{ii} = e^{\lambda_i}$ für $\lambda_i \in \mathbb{C}$, was möglich ist, da $D_{ii} \neq 0$ für alle i. Da D und U kommutieren, gilt

$$Q^k v = D^k U^k v$$

und somit

$$\left(Q^k v\right)_i = e^{\lambda_i k}(U^k v)_i.$$

Es reicht also zu zeigen, dass für U gilt $(U^k v)_i = p_i(k)$. Wir wissen, dass eine nilpotente obere Dreiecksmatrix A existiert, sodass $U = \exp(A)$ ein Polynom in A ist. Also ist $U^n = \exp(A)^n = \exp(nA)$ eine Matrix, deren Einträge Polynome in n (mit Koeffizienten abhängig von A) sind, und somit folgt die Behauptung.

Siehe nächstes Blatt!

5. Da A in $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ liegt, und da über $\mathbb{C}$ jedes Polynom in Linearfaktoren zerfällt, besitzt A über $\mathbb{C}$ eine Jordan Normalform $A = Q^{-1}JQ$ mit J in Jordan Normalform und $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Sei m wie in der Aufgabenstellung, dann gilt

$$I_n = A^m = (Q^{-1}JQ)^m = Q^{-1}J^mQ$$

und folglich ist $J^m = I_n$. Es reicht also zu zeigen, dass jeder Jordanblock endlicher Ordnung Dimension 1×1 besitzt. Angenommen, der Jordanblock $J_{k,\lambda}$ habe endliche Ordnung $m \in \mathbb{N}$, d.h. $J_{k,\lambda}^m = I_k$, und es sei $k > 1$. Man beachte für das Folgende, dass $\lambda^{mk} = \det(J_{k,\lambda})^m = \det(J_{k,\lambda}^m) = 1$ und somit $\lambda \neq 0$ ist. Schreibe

$$J_{k,\lambda} = D_{k,\lambda} + N_k$$

mit $D_{k,\lambda} = \lambda I_k$ und $N_k = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_{k-1} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist

$$I_k = J_{k,\lambda}^m = D_{k,\lambda}^m + \sum_{l=1}^{m} \binom{m}{l} D^{m-l}N^l = \lambda^m I_k + \sum_{l=1}^{m} \binom{m}{l} \lambda^{m-l}N^l.$$

Man berechnet

$$N_k^l = \begin{pmatrix} 0 & I_{k-l} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit sind die Matrizen $N_k, \ldots, N_k^{k-1}$ paarweise verschieden und linear unabhängig und für $l \geq k$ ist $N_k^l = 0$, wie in §5.4, Proposition 3 gezeigt wurde. Da $\binom{m}{l}\lambda^{m-l} \neq 0$ gilt, ist also

$$0 = \sum_{l=1}^{m} \binom{m}{l} \lambda^{m-l}N^l = \sum_{l=1}^{k-1} \binom{m}{l} \lambda^{m-l}N^l,$$

im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $N_k, \ldots, N_{k-1}$. Es folgt, dass $k = 1$ sein muss.

Dies beweist, dass jeder Jordanblock endlicher Ordnung maximal die Dimension 1×1 besitzt und da die (existierende) Jordan Normalform einer Matrix endlicher Ordnung über $\mathbb{C}$ nur Jordanblöcke endlicher Ordnung enthält, ist die Jordan Normalform eine Diagonalmatrix und somit ist die ursprüngliche Matrix (also die Matrix A) diagonalisierbar.