Serie 26: Sesquilinearformen und $\mathbb{C}$-Skalarprodukte

1. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\gamma : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\gamma(u,v) := u^* A v \quad (u, v \in \mathbb{C}^n)$$

eine Sesquilinearform ist.

$^\heartsuit$**b)** Eine Sesquilinearform $\gamma : V \times V \to \mathbb{C}$ heisst nicht ausgeartet, wenn für alle $v \in V \setminus \{0\}$ ein $u \in V$ existiert, sodass $\gamma(u,v) \neq 0$ gilt. Zeigen Sie, dass die Sesquilinearform aus Teilaufgabe a) genau dann nicht ausgeartet ist, wenn $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist.

$^\heartsuit$**c)** Sei $\gamma : V \times V \to \mathbb{C}$ eine hermitesche Sesquilinearform auf einem endlichdimensionalen komplexen Vektorraum V. Zeigen Sie, dass γ genau dann positiv definit ist, wenn eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, sodass die Darstellungsmatrix $\psi_{\mathcal{B}}(\gamma)$ von γ bezüglich $\mathcal{B}$ positiv definit ist.

2. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $(u,v) \mapsto \langle u, v\rangle = u^* A v$ mit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 \end{smallmatrix}\right)$ ein komplexes inneres Produkt auf $\mathbb{C}^2$ definiert. Berechnen Sie $\langle u, v\rangle$ für $u = (1 - \mathrm{i}, 2 + 3\mathrm{i})^T$ und $v = (2 + \mathrm{i}, 3 - 2\mathrm{i})^T$.

3. Zeigen Sie, dass der $\mathbb{C}$-Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ der stetigen Funktionen $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ versehen mit der Paarung

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) \mathrm{d}t \quad (f, g \in V)$$

ein unitärer Vektorraum ist.

Bitte wenden!

4. Sei V ein komplexer Vektorraum. Die Restriktion der skalaren Multiplikation $\mathbb{C} \times V \to V$ auf $\mathbb{R} \times V$ definiert eine reelle Vektorraumstruktur auf V. Im Folgenden schreiben wir $V_{\mathbb{K}}$ für die Menge V versehen mit der Struktur eines $\mathbb{K}$-Vektorraums, wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

a) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein komplexes inneres Produkt auf $V_{\mathbb{C}}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein reelles inneres Produkt auf $V_{\mathbb{R}}$ definiert und beweisen Sie, dass $\mathrm{Re}\langle v, iv \rangle = 0$ für alle $v \in V$ gilt.

b) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein reelles inneres Produkt auf $V_{\mathbb{R}}$, sodass für alle $v \in V$ gilt $\langle v, \mathrm{i}v \rangle = 0$. Zeigen Sie, dass die Paarung

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}} = \langle u, v \rangle + \mathrm{i}\langle \mathrm{i}u, v \rangle \quad (u, v \in V)$$

ein komplexes inneres Produkt auf $V_{\mathbb{C}}$ definiert.

5. *(Parsevals Gleichung)* Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Vektorraum und sei $S \subseteq V$ ein orthonormales Erzeugendensystem.

a) Sei $v \in V$. Zeigen Sie, dass $\langle v, s \rangle = 0$ gilt für alle bis auf endlich viele $s \in S$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $u, v \in V$ die Paresval Gleichung gilt:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{s \in S} \langle u, s \rangle \overline{\langle v, s \rangle}$$

6. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum. Sei $\gamma : V \times V \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform auf V. Zeigen Sie, dass ein eindeutiges $T \in \mathrm{End}(V)$ existiert, sodass

$$\forall u, v \in V : \gamma(u, v) = \langle Tu, v \rangle.$$

Siehe nächstes Blatt!

7. Online-Abgabe

1. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, dann ist die Abbildung $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $(u, v) \mapsto u^T A v$ eine Sesquilinearform.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

2. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum und sei $\|\cdot\|$ die induzierte Norm auf V, d.h. $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Dann gilt:

$$\|v + w\| = \|v\| + \|w\| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} :\ v = \lambda w.$$

(a) Richtig.

(b) Falsch.

3. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum. Dann ist die Abbildung $\Phi : V \to V^*$, $\Phi(v)(w) = \langle v, w\rangle$ ein Isomorphismus.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

4. Sei V ein komplexer Vektorraum. Ein inneres Produkt auf V ist insbesondere eine Bilinearform auf V.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

Bitte wenden!

5. Für welche der folgenden Matrizen ist die zugehörige Sesquilinearform hermitesch?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3+\mathrm{i} \\ 2 & \mathrm{i} & -2\mathrm{i} \\ 3-\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 4+\mathrm{i} & 7 \\ 4-\mathrm{i} & -\pi & -2-8\mathrm{i} \\ 7 & -2+8\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -4 & 4 & 1-\mathrm{i} \\ 4 & 2 & 3 \\ -1+\mathrm{i} & 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

6. Die Menge der hermiteschen Matrizen

$$\mathrm{H} = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid A^* = A\}$$

ist ein Unterraum des $\mathbb{C}$-Vektorraums $M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

7. Die Dimension des Unterraums

$$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid A^T = A\}$$

des $\mathbb{C}$-Vektorraums $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ beträgt

(a) n^2.

(b) $n(n+1)$.

(c) $\frac{n(n+1)}{2}$.

(d) $\frac{n(n-1)}{2}$.

Siehe nächstes Blatt!

8. Die Dimension des Unterraums

$$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid A^T = A\}$$

des $\mathbb{R}$-Vektorraums $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ beträgt

(a) n^2.

(b) $n(n+1)$.

(c) $\frac{n(n+1)}{2}$.

(d) $\frac{n(n-1)}{2}$.

9. Die Dimension des Unterraums der hermiteschen Matrizen

$$\mathrm{H} = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid A^* = A\}$$

von $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ beträgt

(a) n^2.

(b) $n(n+1)$.

(c) $\frac{n(n+1)}{2}$.

(d) $\frac{n(n-1)}{2}$.

10. *Prüfung Sommer 2017:* Sei V ein komplexer Vektorraum. Für jede hermitesche Form $\gamma : V \times V \to \mathbb{C}$ gilt $\gamma(u,u) \in \mathbb{R}$ für alle $u \in V$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Bitte wenden!

11. *Prüfung Winter 2018:* Für alle $u, v \in \mathbb{C}^n$ und für alle $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ gilt $u^*Av = (u^*Av)^T$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

12. *Prüfung Winter 2018:* Sei V ein komplexer Vektorraum. Für jede Sesquilinearform $\gamma : V \times V \to \mathbb{C}$ gilt $\forall u \in V : \gamma(u, u) \in \mathbb{R}$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Sei $\gamma : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(s, t) = \mathrm{i}\bar{s}t$. Dann ist γ eine Sesquilinearform, aber es gilt $\gamma(1, 1) = \mathrm{i} \notin \mathbb{R}$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Donnerstag, den 17. Mai, vor 14:30 Uhr im HG J 68 in einem der Fächer beschriftet mit Abgabe.