Serie 27: Unitäre Vektorräume und normale Abbildungen

1. **a)** Sei V ein komplexer Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ genau dann von einem komplexen inneren Produkt induziert ist, wenn die Abbildung

$$(v, w) \mapsto \|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 - \mathrm{i}\|v + \mathrm{i}w\|^2 + \mathrm{i}\|v - \mathrm{i}w\|^2$$

ein komplexes inneres Produkt ist.

b) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum und $T \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie

$$T \text{ ist unitär} \iff \forall v \in V : \langle Tv, Tv\rangle = \langle v, v\rangle.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\langle v + w, v + w\rangle$ und $\langle v + \mathbf{i}w, v + \mathbf{i}w\rangle$.

2. **a)** Zeigen Sie, dass $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$ gilt für alle $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

b) Nehmen Sie an, dass $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch ist, oder dass $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ normal ist. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte der Matrix A, gezählt mit algebraischer Vielfachheit. Zeigen Sie

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{und} \quad \mathrm{tr}(A^*A) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2.$$

c) Sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Angenommen es gilt

$$\forall v, w \in V : \langle v, w\rangle = 0 \Rightarrow \langle Tv, Tw\rangle = 0.$$

Zeigen Sie, dass ein unitärer Endomorphismus $S : V \to V$ existiert, sodass $T = cS$ für ein $c \in \mathbb{C}$.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass jedes $v \in V$ ein Eigenvektor von $\Phi = T^*T$ ist. Klassifizieren Sie im Anschluss alle linearen Abbildungen, für die alle Vektoren Eigenvektoren sind.

Bitte wenden!

3. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ hermitesch.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden äquivalent sind:

(i) A ist positiv definit.

(ii) Alle Eigenwerte von A sind positiv.

(iii) Es existiert $B \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ mit $A = B^*B$.

(iv) Es existiert eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ mit $A = R^*R$. (Cholesky-Zerlegung)

(v) Es existiert eine hermitesche Matrix $C \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ mit $A = C^*C = C^2$.

b) Zeigen Sie das Hauptminorenkriterium: A ist genau dann positiv definit wenn die Determinante der Matrix $(A_{ij})_{1\le i,j\le k}$ für alle $1 \le k \le n$ positiv ist.

Hinweis: Siehe Analysisskript, Abschnit 10.4.1.

4. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler, unitärer Vektorraum. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus endlicher Ordnung, d.h. es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $T^N = I_V$ gilt.

a) Sei $S \in \mathrm{Aut}(V)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle_S = \langle Sv, Sw\rangle$ ein inneres Produkt definiert.

b) Zeigen Sie, dass

$$\langle v, w\rangle_T = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\langle T^k v, T^k w\rangle \quad (v, w \in V)$$

ein komplexes inneres Produkt auf V definiert.

c) Zeigen Sie, dass T diagonalisierbar ist.

5. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum.

a) Sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, dass eindeutige, selbstadjungierte Endomorphismen $T_1, T_2 \in \mathrm{End}(V)$ existieren, sodass $T = T_1 + \mathrm{i}T_2$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass $T \in \mathrm{End}(V)$ genau dann normal ist, wenn T_1 und T_2 wie in Teilaufgabe (a) miteinander kommutieren.

c) Seien $T, S \in \mathrm{End}(V)$ normal. Zeigen Sie, dass im Allgemeinen $T + S$ nicht normal ist.

Siehe nächstes Blatt!

d) Seien $T, S \in \mathrm{End}(V)$ normal und nehmen Sie an, dass T^* und S kommutieren. Zeigen Sie, dass $T + S$ normal ist.

6. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler, unitärer Vektorraum. Sei $[\cdot,\cdot] : V \times V \to \mathbb{C}$ ein inneres Produkt auf V. Zeigen Sie, dass eine invertierbare lineare Abbildung $T : V \to V$ existiert, sodass

$$\forall v, w \in V : [v, w] = \langle Tv, Tw\rangle.$$

Bitte wenden!

7. Online-Abgabe

1. Jede selbstadjungierte Abbildung ist normal.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

2. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Dann haben T und T^* dieselben Eigenwerte.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

3. Jede selbstadjungierte Abbildung auf einem endlichdimensionalen Vektorraum ist diagonalisierbar.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

4. Jede unitäre Abbildung ist normal.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

5. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ ein normaler Endomorphismus auf einem unitären vektorraum. Dann ist T^* normal.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

Siehe nächstes Blatt!

6. Jede orthogonale Abbildung ist diagonalisierbar.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

7. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer oder unitärer Vektorraum, und sei $T \in \mathrm{End}(V)$, sodass $\sigma(T) = \{1\}$, dann ist T orthogonal, bzw. unitär.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

8. Welche der folgenden Matrizen sind über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar?

(a) $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 2\mathrm{i} & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) $A = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 2\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

9. *Prüfung Winter 2018:* Alle unitären Matrizen sind über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

10. *Prüfung Winter 2018:* Jede normale Matrix ist entweder selbstadjungiert oder unitär.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

11. *Prüfung Sommer 2018:* Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum, und sei $T \in \mathrm{End}(V)$, sodass 1 der einzige Eigenwert von T ist. Dann ist T unitär.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

12. *Prüfung Sommer 2017:* Jede diagonalisierbare Matrix ist normal.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

13. *Prüfung Sommer 2017:* Jede reelle normale Matrix in $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ist selbstadjungiert.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

14. *Prüfung Sommer 2017:* Seien U eine unitäre und A eine invertierbare $n \times n$ Matrix, sodass AUA^{-1} diagonal ist. Dann ist A unitär.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

15. *Prüfung Sommer 2017:* Sei $Q \in O(n)$, dann ist Q über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Donnerstag, den 24. Mai, vor 14:30 Uhr im HG J 68 in einem der Fächer beschriftet mit Abgabe.