Lösung 28:
Repetitionsserie

1. **a)** Die Eigenwerte von L_A sind die Nullstellen des Polynoms $\det([L_A - XI_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B}})$ für eine beliebige Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$. Nach Wahl der Standardbasis ergibt sich

$$\begin{aligned}\det([L_A]_{\mathcal{E}_3} - XI_3) &= \det(A - XI_3)\\ &= \det\begin{pmatrix}2-X & 1 & 0\\ 0 & -1-X & 3\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\\ &= -(2-X)(1+X)(4-X)\end{aligned}$$

und somit sind die Eigenwerte gegeben durch $\{-1, 2, 4\}$. Da sie alle verschieden sind, ist L_A also diagonalisierbar. Die geometrischen und die algebraischen Vielfachheiten stimmen also alle überein mit Wert gleich 1 und da die Eigenwerte alle verschieden sind, sind die Eigenräume alle eindimensional.

b) Da die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix das Produkt der Diagonaleinträge ist, wissen wir, dass das charakteristische Polynom von T gegeben ist durch

$$\det([T]_{\mathcal{B}} - XI_6) = (2-X)^2(-1-X)(-X)^2(a_{66} - X).$$

Somit sind die Eigenwerte von T gegeben durch $\sigma(T) = \{-1, 0, 2, a_{66}\}$. Wir unterscheiden nun die folgenden vier Fälle:

"$a_{66} \notin \{-1, 0, 2\}$" In diesem Fall besitzt T die vier paarweise verschiedenen Eigenwerte $\{-1, 0, 2, a_{66}\}$. Um die Eigenvektoren und die Eigenräume zu bestimmen, lösen wir wieder das System $([T]_{\mathcal{B}} - \lambda I_6)x = 0$ für die Eigenwerte $\lambda \in \{-1, 0, 2, a_{66}\}$, denn für jede Lösung $s \in \mathbb{R}^6$ dieses Systems gilt für das eindeutig definierte $v \in V$ mit $s = [v]_{\mathcal{B}}$, dass

$$0 = ([T]_{\mathcal{B}} - \lambda I_6)s = [T - \lambda I_V]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [(T - \lambda I_V)v]_{\mathcal{B}}$$

Bitte wenden!

und folglich auch $Tv = \lambda v$.

Falls λ ein von a_{66} verschiedener Eigenwert ist, dann können wir den Eigenraum relativ leicht berechnen. Mittels elementarer Zeilenumformungen können wir alle Einträge in der letzten Spalte in der ersten bis fünften Zeile eliminieren, und es reicht, den Kern der resultierenden Diagonalmatrix zu berechnen:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{16} \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & a_{26} \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda & 0 & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-\lambda)x_1 + a_{16}x_6 \\ -\lambda x_2 + a_{26}x_6 \\ -\lambda x_3 + a_{36}x_6 \\ -(1+\lambda)x_4 + a_{46}x_6 \\ (2-\lambda)x_5 + a_{56}x_6 \\ (a_{66}-\lambda)x_6 \end{pmatrix}$$

Aus der letzten Koordinate und der Annahme $\lambda \neq a_{66}$ folgt $x_6 = 0$.

- Falls $\lambda = -1$, dann ist x_4 beliebig und $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0$ und folglich
$$E_{-1} = \operatorname{span}\{e_4\}.$$
- Falls $\lambda = 0$, dann sind $x_1 = x_4 = x_5 = 0$ und x_2, x_3 beliebig, sprich
$$E_0 = \operatorname{span}\{e_2, e_3\}.$$
- Falls $\lambda = 2$, dann sind x_1, x_5 beliebig und $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ und folglich
$$E_2 = \operatorname{span}\{e_1, e_5\}.$$

Falls $\lambda = a_{66}$, dann gilt mit $a_{66} \notin \{-1, 0, 2\}$, dass $\operatorname{Rang}\big([T] - \lambda I_6\big) = 5$ und folglich $\operatorname{nullity}(T - \lambda I_V) = 1$, sodass $\dim E_{a_{66}} = 1$.

Insbesondere stimmen die algebraische und die geometrische Multiplizität für alle Eigenwerte überein. Also ist T diagonalisierbar.

“$a_{66} = -1$”: Die Eigenräume zu den Eigenwerten 0 und 2 bleiben unverändert und der Eigenraum zum Eigenwert -1 ergibt sich aus obigem Gleichungssystem nach Einsetzen als

$$E_{-1} = \begin{cases} \operatorname{span}\{e_4\} & \text{falls } a_{46} \neq 0 \\ \operatorname{span}\{e_4, (a_{16}, 3a_{26}, 3a_{36}, 0, a_{56}, -3)^T\} & \text{sonst} \end{cases}$$

und folglich ist die geometrische Vielfachheit von -1 gleich der algebraischen Vielfachheit genau dann, wenn $a_{46} = 0$.

“$a_{66} = 0$”: Die Eigenräume zu den Eigenwerten -1 und 2 bleiben unverändert und der Eigenraum zum Eigenwert 0 ergibt sich nach Einsetzen als

$$E_0 = \begin{cases} \operatorname{span}\{e_2, e_3\} & \text{falls } a_{26} \neq 0 \text{ oder } a_{36} \neq 0 \\ \operatorname{span}\{e_2, e_3, (a_{16}, 0, 0, -2a_{46}, a_{56}, -2)^T\} & \text{sonst} \end{cases}$$

und folglich ist die geometrische Vielfachheit von 0 gleich der algebraischen Vielfachheit genau dann, wenn $a_{26} = a_{36} = 0$.

Siehe nächstes Blatt!

"$a_{66}=2$": Die Eigenräume zu den Eigenwerten -1 und 0 bleiben unverändert und der Eigenraum zum Eigenwert 2 ergibt sich nach Einsetzen als

$$E_2 = \begin{cases} \operatorname{span}\{e_1, e_5\} & \text{falls } a_{16} \neq 0 \text{ oder } a_{56} \neq 0 \\ \operatorname{span}\{e_1, e_5, (0, 3a_{26}, 3a_{36}, 2a_{46}, 0, 6)^T\} & \text{sonst} \end{cases}$$

und folglich ist die geometrische Vielfachheit von 2 gleich der algebraischen Vielfachheit genau dann, wenn $a_{16} = a_{56} = 0$.

2. Eine lange direkte Berechnung des charakteristischen Polynoms von C liefert

$$\operatorname{char}_C(X) = X^4 - 4X^3 + 3X^2 + 4X - 4 = (X-1)(X+1)(X-2)^2.$$

Wir lösen wieder die resultierenden linearen Gleichungssysteme.

"$\lambda = -1$": Mittels elementarer Zeilenumformungen erhalten wir

$$C - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 & -7 \\ -3 & 0 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4+Z_1]{\substack{Z_2-Z_1 \\ Z_3+2Z_1}} \begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 & -7 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_1+Z_2]{Z_3+Z_2} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2-3Z_3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{6}Z_2} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3-2Z_2]{Z_1+Z_2} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_2\leftrightarrow Z_3]{-\frac{1}{3}Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$E_{-1} = \mathbb{Q} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

"$\lambda = 1$": Wir berechnen

$$C - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 & -7 \\ -3 & -2 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2+Z_4]{Z_1+Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

$$\xrightarrow[Z_4-3Z_2]{\substack{Z_1-Z_2\\ Z_3-4Z_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3-2Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_4-3Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3\leftrightarrow Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und folglich ist

$$E_1 = \mathbb{Q}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

"$\lambda = 2$": Wir berechnen

$$C - 2I_4 = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -1 & -7 \\ -3 & -3 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 1 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3+Z_1]{Z_4+Z_2} \begin{pmatrix} -6 & -3 & -1 & -7 \\ -3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_1-2Z_2} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2+Z_1} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{3}Z_2]{Z_1-3Z_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und folglich ist

$$E_2 = \mathbb{Q}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen: Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 2 ist gleich eins, also kleiner als die algebraische Vielfachheit. Es ist also $\dim(E_{-1} + E_1 + E_2) = 3$ und da $\{-1, 1, 2\}$ die Menge der Eigenwerte von C ist, folgt, dass die Matrix C nicht diagonalisierbar ist über $\mathbb{Q}$.

Siehe nächstes Blatt!

3. **a)** Wir bezeichnen für $z \in \mathbb{C}$ und $v \in V$ durch $z \cdot v$ das Bild der skalaren Multiplikation von z mit v aus der Aufgabenstellung, d.h. falls $z = s + \mathbf{i}t$, dann ist $z \cdot v = sv + tJv$.

Die Vektorraumaxiome (V1) bis (V4) betreffen nur die additive Struktur auf V und die bleibt unter der neuen Struktur unverändert. Vektorraumaxiom (V5) gilt auch nach wie vor.

Für Axiom (V6) seien $s, t, x, y \in \mathbb{R}$ und sei $v \in V$, sei $z = s + \mathbf{i}t$ und sei $\lambda = x + \mathbf{i}y$. Dann gilt $\lambda z = sx - ty + \mathbf{i}(sy + tx)$ und folglich

$$(\lambda z) \cdot v = (sx - ty)v + (sy + tx)Jv.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}\lambda \cdot (z \cdot v) = \lambda \cdot (sv + tJv) &= x(sv + tJv) + yJ(sv + tJv) \\ &= xsv + xtJv + ysJv + ytJ^2v \\ &= (xs - ty)v + (sy + tx)Jv\end{aligned}$$

und somit ist $(\lambda z) \cdot v = \lambda \cdot (z \cdot v)$.

Da J nach Voraussetzung linear ist, folgt (V7): Seien $v, w \in V$, dann ist

$$\begin{aligned}z \cdot (v + w) &= s(v + w) + tJ(v + w) = (sv + tJv) + (sw + tJw) \\ &= z \cdot v + z \cdot w.\end{aligned}$$

Und schliesslich folgt (V8):

$$\begin{aligned}(z + \lambda) \cdot v &= \big((s + x) + \mathbf{i}(t + y)\big) \cdot v = (s + x)v + (t + y)Jv \\ &= (sv + tJv) + (xv + yJv) = z \cdot v + \lambda \cdot v.\end{aligned}$$

b) Die Abbildung L_A mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

definiert eine komplexe Struktur auf $\mathbb{R}^{2n}$.

c) **"$1 \implies 2$":** Seien $v, w \in V$ beliebig, dann ist

$$\beta_J(v, w) = \omega(Jv, w) = \omega(J^2v, Jw) = -\omega(v, Jw) = \omega(Jw, v) = \beta_J(w, v).$$

Also ist β_J symmetrisch.
Sei $v \in V \setminus \{0\}$, dann ist

$$\beta_J(v, v) = \omega(Jv, v) > 0$$

nach Voraussetzung.
Es bleibt die J-Invarianz. Für $u, v \in V$ gilt

$$\beta_J(Ju, Jv) = \omega(J^2u, Jv) = -\omega(u, Jv) = \omega(Jv, u) = \beta_J(v, u) = \beta_J(u, v)$$

unter Verwendung der Symmetrie von β_J.

Bitte wenden!

“2 $\implies$ 3”: Seien $u, v, w \in V$, dann ist

$$\begin{aligned}\gamma_J(u+v,w) &= \omega\big(J(u+v),w\big) - \mathbf{i}\omega(u+v,w)\\ &= \omega(Ju+Jv,w) - \mathbf{i}\omega(u+v,w)\\ &= \omega(Ju,w)+\omega(Jv,w) - \mathbf{i}\omega(u,w) - \mathbf{i}\omega(v,w)\\ &= \gamma_J(u,w)+\gamma_J(v,w)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\gamma_J(u,w+v) &= \omega\big(Ju,w+v\big) - \mathbf{i}\omega(u,w+v)\\ &= \omega(Ju,w+v) - \mathbf{i}\omega(u,w+v)\\ &= \omega(Ju,v)+\omega(Ju,w) - \mathbf{i}\omega(u,v) - \mathbf{i}\omega(u,w)\\ &= \gamma_J(u,v)+\gamma_J(u,w).\end{aligned}$$

Sei $z = s + \mathbf{i}t \in \mathbb{C}$, dann ist

$$\begin{aligned}\gamma_J(z\cdot u,v) &= \gamma_J(su+tJu,v) = \gamma_J(su,v)+\gamma_J(tJu,v)\\ &= \omega(sJu,v) - \mathbf{i}\omega(su,v) + \omega(tJ^2u,v) - \mathbf{i}\omega(tJu,v)\\ &= s\omega(Ju,v) - \mathbf{i}s\omega(u,v) - t\omega(u,v) - \mathbf{i}t\omega(Ju,v)\\ &= s\gamma_J(u,v) - \mathbf{i}t\gamma_J(u,v) = \overline{z}\gamma_J(u,v).\end{aligned}$$

Analog gilt

$$\begin{aligned}\gamma_J(u,z\cdot v) &= \gamma_J(u,sv+tJv) = \gamma_J(u,sv)+\gamma_J(u,tJv)\\ &= \omega(Ju,sv) - \mathbf{i}\omega(u,sv) + \omega(Ju,tJv) - \mathbf{i}\omega(u,tJv)\\ &= s\omega(Ju,v) - \mathbf{i}s\omega(u,v) + t\omega(u,v) + \mathbf{i}t\omega(Ju,v)\\ &= s\gamma_J(u,v) + \mathbf{i}t\gamma_J(u,v) = z\gamma_J(u,v).\end{aligned}$$

Also ist γ_J sesquilinear.
Es gilt

$$\begin{aligned}\gamma_J(u,v) &= \omega(Ju,v) - \mathbf{i}\omega(u,v)\\ &= -\omega(u,Jv) - \mathbf{i}\omega(u,v)\\ &= \omega(Jv,u) + \mathbf{i}\omega(v,u) = \overline{\gamma_J(v,u)},\end{aligned}$$

und somit ist γ_J hermitesch.
Es sind $\omega(Ju,v) \in \mathbb{R}$ und $\omega(u,v) \in \mathbb{R}$ für alle $u, v \in V$ und somit $\mathrm{Re}\big(\gamma_J(u,v)\big) = \omega(Ju,v) = \beta_J(u,v)$. Somit folgt die positive Definitheit des Realteils von γ_J aus der positiven Definitheit von β_J.

“3 $\implies$ 1”: Da der Realteil von $\gamma_J(u,v)$ mit $\omega(Ju,v)$ übereinstimmt, folgt der zweite Teil der Kompatibilität sofort. Es bleibt zu zeigen, dass ω invariant ist unter J. Man berechnet

$$\omega(Ju,Jv) = \gamma_J(u,Jv) + \mathrm{i}\omega(u,Jv)$$

Siehe nächstes Blatt!

$$
\begin{aligned}
&= \overline{\gamma_J(Jv,u)} + \mathrm{i}\omega(u,Jv) \\
&= \omega(J^2 v,u) + \mathrm{i}\omega(Jv,u) + \mathrm{i}\omega(u,Jv) \\
&= \omega(u,v)
\end{aligned}
$$

wie gewünscht.

d) Sei $J = L_{J_0}$. Dann ist $J^2 = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{2n}}$ und wegen $J_0^T = J_0^{-1}$ gelten für alle $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$

$$
\begin{aligned}
\omega_0(Ju,Jv) &= (J_0 u)^T J_0 J_0 v = u^T J_0^T J_0 J_0 v = u^T J_0 v = \omega_0(u,v), \\
\omega_0(Ju,u) &= (J_0 u)^T J_0 u = u^T J_0^T J_0 u = u^T u = \langle u, u\rangle,
\end{aligned}
$$

wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das standard innere Produkt auf $\mathbb{R}^{2n}$ ist. Insbesondere ist J kompatibel.

4. **a)** Sei T orthogonal bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dann ist $1 = \det(T^*T) = \det(T^*)\det(T)$. Für jede ONB $\mathcal{B}$ von V (bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$) gilt $[T^*]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^T$, und folglich ist $\det(T^*) = \det([T]_{\mathcal{B}}^T) = \det([T]_{\mathcal{B}}) = \det(T)$. Insbesondere ist $\det(T) \in \{\pm 1\}$.

Dies zeigt, dass beispielsweise kein inneres Produkt auf V existiert, sodass $2I_V$ orthogonal ist. Die Aussage ist also falsch.

b) Angenommen die Bilinearform $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ definiert ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^2$, sodass T bezüglich β orthogonal ist. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\beta(e_1,e_1) =& \beta(Te_1,Te_1) = \beta(e_1,e_1) + 2\beta(e_1,e_2) + \beta(e_2,e_2), \\
\beta(e_2,e_2) =& \beta(Te_2,Te_2).
\end{aligned}
$$

Insbesondere ist aufgrund der ersten Gleichung

$$
\beta(e_1,e_2) = -\frac{1}{2}\beta(e_2,e_2).
$$

Des Weiteren gilt für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, dass

$$
\begin{aligned}
\beta(a_1e_1 + a_2e_2, a_1e_1 + a_2e_2) =& a_1^2\beta(e_1,e_1) + 2a_1a_2\beta(e_1,e_2) + a_2^2\beta(e_2,e_2) \\
\beta\big(T(a_1e_1 + a_2e_2), T(a_1e_1 + a_2e_2)\big) =& \beta\big(a_1e_1 + (a_1+a_2)e_2, a_1e_1 + (a_1+a_2)e_2\big) \\
=& a_1^2\beta(e_1,e_1) + 2a_1(a_1+a_2)\beta(e_1,e_2) + (a_1+a_2)^2\beta(e_2,e_2) \\
=& a_1^2\beta(e_1,e_1) + 2a_1a_2\beta(e_1,e_2) + 2a_1a_2\beta(e_2,e_2) + a_2^2\beta(e_2,e_2).
\end{aligned}
$$

Da T nach Voraussetzung orthogonal ist bezüglich β, gilt insbesondere für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$$
0 = 2a_1a_2\beta(e_2,e_2).
$$

Das impliziert $\beta(e_2,e_2) = 0$ im Widerspruch zur Annahme, dass β ein inneres Produkt ist.

Bitte wenden!

c) Wir bemerken zuerst, dass A diagonalisierbar ist, denn

$$\mathrm{char}_T(X) = -(5-X)(5+X) + 24 = (X+1)(X-1),$$

und somit besitzt T zwei verschiedene reelle Eigenwerte.

Eine (geordnete) Basis von $\mathbb{R}^2$ bestehend aus Eigenvektoren von T ist gegeben durch

$$\mathcal{B} = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Wir definieren nun eine Bilinearform $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$, sodass $\beta(v_i, v_j) = \delta_{ij}$, d.h. $[\beta]_{\mathcal{B}} = I_2$, womit β positiv definit ist, und $\mathcal{B}$ ist eine ONB bezüglich β. Zudem ist für $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

$$\beta(Tv_i, Tv_j) = \beta(\lambda_i v_i, \lambda_j v_j) = \lambda_i \lambda_j \delta_{ij}.$$

Es ist also das Bild der ONB $\mathcal{B}$ unter T eine ONB (bezüglich β) und folglich ist T orthogonal.

Um β zu konstruieren, verwenden wir

$$[\beta]_{\mathcal{E}_2} = ([I_{\mathbb{R}^2}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_2})^T [\beta]_{\mathcal{B}} [I_{\mathbb{R}^2}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_2} = ([I_{\mathbb{R}^2}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_2})^T [I_{\mathbb{R}^2}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_2},$$

und mit

$$[I_{\mathbb{R}^2}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_2} = ([I_{\mathbb{R}^2}]^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{B}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

folgt also

$$[\beta]_{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das innere Produkt β ist also gegeben durch

$$\beta(v, w) = v^T \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} w.$$

Nun ist T bezüglich β orthogonal, denn für alle $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ gilt nach Konstruktion

$$\begin{aligned} \beta\big(T(a_1v_1 + a_2v_2), T(b_1v_1 + b_2v_2)\big) &= \beta(a_1v_1 - a_2v_2, b_1v_1 - b_2v_2) \\ &= a_1b_1\beta(v_1, v_1) - a_1b_2\beta(v_1, v_2) - a_2b_1\beta(v_2, v_1) + b_2^2\beta(v_2, v_2) \\ &= a_1b_1\beta(v_1, v_1) + a_1b_2\beta(v_1, v_2) + a_2b_1\beta(v_2, v_1) + b_2^2\beta(v_2, v_2) \qquad (\star) \\ &= \beta(a_1v_1 + a_2v_2, b_1v_1 + b_2v_2), \end{aligned}$$

wobei wir in $(\star)$ verwendet haben, dass $\beta(v_1, v_2) = \beta(v_2, v_1) = 0$.

Siehe nächstes Blatt!

d) Obiges Beispiel suggeriert das folgende hinreichende Kriterium:

Proposition: Sei $T \in \operatorname{End}(V)$. Falls T diagonalisierbar ist mit Eigenwerten $\sigma(T) \subset \{\pm 1\}$, dann existiert ein inneres Produkt auf V, für welches T orthogonal ist.

Zum Beweis sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von T, d.h. $Tv_i = \lambda_i v_i$ für ein $\lambda_i \in \{\pm 1\}$. Sei $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ die symmetrische Bilinearform gegeben durch

$$[\beta]_{\mathcal{B}} = I_n.$$

Dann ist β positiv definit und $\mathcal{B}$ ist eine ONB bezüglich dem inneren Produkt β auf V. Es gilt für alle $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, $w = \sum_{i=1}^n b_i v_i$

$$\begin{aligned}
\beta(Tv, Tw) &= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \beta(Tv_i, Tv_j) = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \beta(\lambda_i v_i, \lambda_j v_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \lambda_i \lambda_j \beta(v_i, v_j) = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \underbrace{\lambda_i \lambda_j \delta_{ij}}_{=\delta_{ij}} \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \beta(v_i, v_j) = \beta(v, w)
\end{aligned}$$

und folglich ist T bezüglich β orthogonal.

5. a) Da die Evaluationshomomorphismen $e_a : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, $p \mapsto p(a)$ linear sind, und unter Verwendung der Linearität der formalen Ableitungen $p \mapsto p^{(k)}$ für beliebige $k \in \mathbb{N}$, erhalten wir, dass die Abbildung $(p, q) \mapsto \langle p, q \rangle$ im ersten Argument linear ist. Explizit gilt wegen erwähnter Tatsachen für $p_1, p_2, q \in \mathbb{R}_2[X]$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\langle p, q \rangle =& (p_1 + \lambda p_2)(0) q(0) + (p_1 + \lambda p_2)'(0) q'(0) + (p_1 + \lambda p_2)''(0) q''(0) \\
=& (p_1 + \lambda p_2)(0) q(0) + (p_1' + \lambda p_2')(0) q'(0) + (p_1'' + \lambda p_2'')(0) q''(0) \\
=& \big(p_1(0) + \lambda p_2(0)\big) + \big(p_1'(0) + \lambda p_2'(0)\big) q'(0) + \big(p_1''(0) + \lambda p_2''(0)\big) q''(0) \\
=& \langle p_1, q \rangle + \lambda \langle p_2, q \rangle.
\end{aligned}$$

Symmetrie von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ folgt aus der Tatsache, dass die Multiplikation auf $\mathbb{R}$ kommutativ ist, denn

$$\begin{aligned}
\langle p, q \rangle =& p(0) q(0) + p'(0) q'(0) + p''(0) q''(0) \\
=& q(0) p(0) + q'(0) p'(0) + q''(0) p''(0) = \langle q, p \rangle
\end{aligned}$$

für beliebige $p, q \in \mathbb{R}[X]$.

Bitte wenden!

Die Positivität folgt aus der Positivität des Quadrates reeller Zahlen, denn es ist sicherlich

$$\langle p, p\rangle = p(0)^2 + p'(0)^2 + p''(0)^2 \geq 0$$

Wir müssen noch zeigen, dass aus $\langle p, p\rangle = 0$ die Gleichung $p = 0$ folgt. Sei p gegeben durch $p(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$, dann sind $p'(X) = 2a_2X + a_1$ und $p''(X) = 2a_2$ und somit ist

$$\langle p, p\rangle = a_0^2 + a_1^2 + 4a_2^2$$

und folglich impliziert $\langle p, p\rangle = 0$, dass $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, bzw. dass $p = 0$. Somit ist $\langle \cdot, \cdot\rangle$ ein inneres Produkt.

b) Wie oben besprochen, gilt für $p \in \mathbb{R}_2[X]$ gegeben durch $p(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$, dass $p'(X) = 2a_2X + a_1 \in P_1(\mathbb{R})$ und folglich ist $(X + 1)p'(X) \in \mathbb{R}_2[X]$. Also ist T wohldefiniert.

Die Linearität von T folgt aus der Distributivität von Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R}_2[X]$ sowie der Linearität der formalen Ableitung. Seien nämlich $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist

$$\begin{aligned}
T(p_1 + \lambda p_2) =&(X + 1)\big(p_1(X) + \lambda p_2(X)\big)' \\
=&(X + 1)\big(p_1'(X) + \lambda p_2'(X)\big) \\
=&(X + 1)p_1'(X) + \lambda(X + 1)p_2'(X) \\
=&T(p_1) + \lambda T(p_2).
\end{aligned}$$

Im Folgenden betrachten wir die Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (1, X, \frac{1}{2}X^2)$ von $\mathbb{R}_2[X]$. Man berechnet leicht, dass

$$\begin{aligned}
T(1) =&0 \\
T(X) =&X + 1 \\
T(\tfrac{1}{2}X^2) =&X^2 + X
\end{aligned}$$

und folglich ist

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir haben in der Vorlesung gezeigt, dass

$$[T^*]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es ist also

$$T^*(1) = X,\ T^*(X) = \tfrac{1}{2}X^2 + X \text{ und } T^*(\tfrac{1}{2}X^2) = X^2 \text{ bzw. } T^*(X^2) = 2X^2.$$

Siehe nächstes Blatt!

Unter Verwendung der Linearität von T^* folgt

$$T^*(a_2X^2 + a_1X + a_0) = (2a_2 + \tfrac{1}{2}a_1)X^2 + (a_1 + a_0)X.$$

c) Wir wissen, dass $v = \alpha_0 + \alpha_1 X + \frac{\alpha_2}{2}X^2$ ist für gewisse $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, die wir nun bestimmen.

Da $\{1, X, \frac{1}{2}X^2\}$ eine Orthonormalbasis ist, gilt

$$\alpha_0 = \langle 1, v\rangle,\ \alpha_1 = \langle X, v\rangle,\ \alpha_2 = \langle \tfrac{1}{2}X^2, v\rangle,$$

und aus der Bedingung $f(p) = \langle p, v\rangle$ folgt nach einsetzen der Basis für p, dass

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \int_0^1 1\mathrm{d}x = 1\\
\alpha_1 &= \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\\
\alpha_2 &= \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Also ist $v = \frac{1}{12}X^2 + \frac{1}{2}X + 1$.

6. Da A positiv definit ist, definiert die Abbildung $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle_A := x^T Ay$ ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^n$. Zudem ist A invertierbar. Es gilt per definitionem

$$\langle A^{-1}Bx, y\rangle_A = x^T B^T (A^{-1})^T Ay = x^T By = x^T AA^{-1}By = \langle x, A^{-1}By\rangle_A$$

und somit ist die Abbildung $L_{A^{-1}B}$ selbstadjungiert bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$. Insbesondere besitzt $\mathbb{R}^n$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ (bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$) bestehend aus Eigenvektoren von $L_{A^{-1}B}$. Sei $Q = (v_1 \mid \ldots \mid v_n)$ die Matrix mit den Elementen einer solchen Orthonormalbasis als Spalten. Nach Annahme ist $(Q^{(i)})^T AQ^{(j)} = \delta_{ij}$ und folglich $Q^T AQ = I_n$. Insbesondere ist also $Q^T A = Q^{-1}$. Andererseits ist $Q = [I_{\mathbb{R}^n}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_n}$ und somit nach Konstruktion $D := Q^{-1}(A^{-1}B)Q$ eine Diagonalmatrix. Es folgt

$$D = Q^{-1}(A^{-1}B)Q = Q^T A(A^{-1}B)Q = Q^T BQ$$

und es folgt die Behauptung.

Für nicht postiv definite Matrizen muss dies nicht gelten, wie sich anhand des Beipiels belegen lässt. Sei $Q = \left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$, sodass $Q^T AQ$ und $Q^T BQ$ beides Diagonalmatrizen sind. Man berechnet

$$Q^T AQ = \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd\\ ab - cd & b^2 - d^2\end{pmatrix} \text{ sowie } Q^T BQ = \begin{pmatrix} 2ac & ad + bc\\ ad + bc & 2bd\end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

Es gilt also $ab - cd = ad + bc = 0$ und insbesondere $ad = -bc$ und $ab = cd$. Da Q invertierbar ist, gilt $0 \neq ad - bc = 2ad = -2bc$. Insbesondere sind alle Einträge von Q von 0 verschieden. Es folgt

$$\frac{d}{b} = \frac{ad}{ab} = -\frac{bc}{cd} = -\frac{b}{d}.$$

Das ist absurd.

7. Im Folgenden seien $n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$.

a) Unter Verwendung der Singulärwertzerlegung finden wir orthonormale $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ von V und W, sodass wegen Rang

$$Tv_1 = \sigma_1 w_1$$

und $Tv_i = 0$ sonst. Sei $u \in V$ beliebig, dann ist $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ und somit

$$Tu = \sum_{i=1}^n \alpha_i T v_i = \alpha_1 \sigma_1 w_1 = \langle v_1, u \rangle \sigma_1 w_1.$$

Wir definieren $v = v_1$ und $w = \sigma_1 w_1$.

b) Seien $\mathcal{B}' = (v_1, \ldots, v_n)$, $\mathcal{C}' = (w_1, \ldots, w_m)$ ONB von V bzw. von W, sodass $v_1 = \frac{1}{\|v\|_V} v$ und $w_1 = \frac{1}{\|w\|_W} w$, welche existieren, da $v \neq 0$ sowie $w \neq 0$ gelten. Dann ist

$$Tu = \langle u, v \rangle_V w = \|v\|_V \|w\|_W \langle u, v_1 \rangle_V w_1.$$

Man beachte, dass die Darstellungsmatrix von $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ bezüglich $\mathcal{B}$ nach Konstruktion die Identität ist, d.h. $\langle u_1, u_2 \rangle_V = [u_1]_{\mathcal{B}}^T [u_2]_{\mathcal{B}}$ für alle $u_1, u_2 \in V$. Insbesondere ist also

$$\begin{aligned}[Tu]_{\mathcal{C}} =& \|v\|_V \|w\|_W \langle u, v_1 \rangle_V [w_1]_{\mathcal{C}} \\ =& \big(\|v\|_V \|w\|_W [v_1]_{\mathcal{B}}^T [u]_{\mathcal{B}}\big) [w_1]_{\mathcal{C}} = \tilde{R} \tilde{D} \tilde{Q}^T [u]_{\mathcal{B}},\end{aligned}$$

wobei $\tilde{R} = \big([w_1]_{\mathcal{C}} \mid \cdots \mid [w_m]_{\mathcal{C}}\big)$, $D \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ mit $D_{ij} = \|v\|_V \|w\|_W \delta_{i1} \delta_{j1}$ für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, und $Q = \big([v_1]_{\mathcal{B}} \mid \cdots \mid [v_n]_{\mathcal{B}}\big)$.

c) Seien $u \in V$, $\tilde{w} \in W$, dann ist

$$\langle Tu, \tilde{w} \rangle_W = \langle u, v \rangle_V \langle w, \tilde{w} \rangle_W = \langle u, \langle \tilde{w}, w \rangle_W v \rangle_V,$$

sodass $T^* \tilde{w} = \langle \tilde{w}, w \rangle_W v$ gilt.

Siehe nächstes Blatt!

8. **a)** Bezüglich der Standardbasis ist die Darstellungsmatrix von Q gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

b) Unter Verwendung des symmetrischen Gaussverfahrens erhalten wir

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{S_3 \mapsto S_1 + S_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \mapsto Z_1 + Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{S_3 \mapsto -S_2 + S_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \mapsto -S_2 + S_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Folglich ist A kongruent zur Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir wissen aus der Vorlesung, dass die Signatur einer symmetrischen Matrix (bzw. die Signatur der zugehörigen quadratischen Form) unter Kongruenz invariant ist, und da A' Signatur $(3, 0)$ besitzt, ist auch die Signatur von Q gleich $(3, 0)$. Insbesondere ist Q positiv definit.

c) Aus der obigen Rechnung wissen wir, dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist also

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

eine Cholesky-Zerlegung von A. Da $\det(A) \neq 0$, gilt $\det(R) \neq 0$ für jede Cholesky Zerlegung $A = R^T R$. Sei also $A = Q^T Q$ eine weitere Cholesky-Zerlegung. Da Inversen invertierbarer oberer Dreiecksmatrizen obere Dreiecksmatrizen sind, ist also $I_3 = (Q^T)^{-1} R^T R Q^{-1}$. Insbesondere gilt also die Gleichung $((RQ^{-1})^T)^{-1} = RQ^{-1}$. Weil RQ^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist, ist folglich $(RQ^{-1})^T$ eine untere Dreiecksmatrix und da die Inverse einer unteren Dreiecksmatrix eine untere Dreiecksmatrix ist, ist also $((RQ^{-1})^T)^{-1}$ und somit RQ^{-1} eine untere Dreiecksmatrix. Eine Matrix, die gleichzeitig eine obere und eine untere Dreiecksmatrix ist, ist eine Diagonalmatrix und also ist RQ^{-1} eine Diagonalmatrix. Da $I_3 = (RQ^{-1})^T (RQ^{-1})$ ist, sind die Diagonaleinträge von RQ^{-1} Quadratwurzeln von 1 und da die Diagonaleinträge von R und von Q^{-1} nicht-negativ sind, sind auch die Diagonaleinträge von RQ^{-1} nicht-negativ und insbesondere nicht-negative Quadratwurzeln von 1. Somit sind aber alle Diagonaleinträge von RQ^{-1} gleich 1 und insbesondere also $R = Q$. Dies zeigt, dass die Cholesky-Zerlegung von A durch A eindeutig bestimmt ist.

9. Da A blockdiagonal ist, reicht es, die JNF sowie die Basen für die Blöcke bzw. für die entsprechenden invarianten Unterräume zu bestimmen.

Das charakteristische Polynom von

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

ist

$$\mathrm{char}_{A_1}(X) = (X+1)^2$$

und somit besitzt A_1 den doppelten Eigenwert -1. Man berechnet

$$A_1 - (-1)I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

d.h. $A_1 - (-1)I_2$ hat Rang 1 und somit ist die geometrische Multilpzität des Eigenwertes -1 nicht gleich der algebraischen Multiplizität. Folglich ist A_1 ähnlich zu $J_{2,-1}$. Wir bestimmen eine Jordan-Basis. Der Vektor $\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ liegt im Kern von $A_1 + I_2$ und ist also ein Eigenvektor von A_1 zum Eigenwert -1. Wir wissen, dass $\mathrm{span}(\{e_1, e_2\})$ der Hauptraum zum Eigenwert -1 ist, da $\{e_1, e_2\}$ den gesamten Raum aufspannt und der Eigenwert -1 der einzige Eigenwert von A_1 ist. Da e_2 und $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ linear unabhängig sind, ist $v_2 = v_1 + e_2 \notin \mathrm{Ker}(A_1)$ und folglich $\big((A_1 + I_2)v_2, v_2\big)$ eine Jordanbasis von $\mathrm{span}(\{e_1, e_2\})$.

Ähnlich argumentiert man für den zweiten Block, wobei wir in diesem Fall ein wenig systematischer vorgehen wollen.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Das charakteristische Polynom von A_2 ist

$$\mathrm{char}_{A_2}(X) = -(X-2)^3$$

und somit ist 2 ein dreifacher Eigenwert von A_2. Man berechnet

$$A_2 - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat Rang 2 und folglich ist $\dim \mathrm{Ker}(A_2 - 2I_3) = 1$. Insbesondere ist A_2 ähnlich zu $J_{3,2}$. Wir bestimmen eine Jordan-Basis, indem wir einen Zyklus $((A_2-2I_3)^2 v_1, (A_2-2I_3)v_1, v_1)$ bestimmen. Hierfür lösen wir eine Folge von Gleichungssystemen, d.h. wir bestimmen zuerst $v_3 = (A_2-2I_3)^2 v_1 \in \mathrm{Ker}(A_2-2I_3)$, dann $v_2 = (A_2-2I_3)v_1$ durch Lösen des inhomogenen Systems $(A_2-2I_3)v_2 = v_3$ und schlussendlich v_1 durch Lösen des Systems $(A_2-2I_3)v_1 = v_2$.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} &\xrightarrow[Z_2 \mapsto Z_2 - Z_1]{Z_3 \mapsto Z_3 + 2Z_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{Z_3 \mapsto Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) &\xrightarrow[Z_2 \mapsto Z_2 - Z_1]{Z_3 \mapsto Z_3 + 2Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{Z_3 \mapsto Z_3 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
&\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) &\xrightarrow[Z_2 \mapsto Z_2 - Z_1]{Z_3 \mapsto Z_3 + 2Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{Z_3 \mapsto Z_3 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

$$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also die Jordanbasis

$$\mathcal{B}_2 = \left(v_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \right) \right)$$

für $\mathbb{R}^3$ (bezüglich A_2).

Beides zusammen liefert, dass

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und die Jordanbasis

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

10. **a)** Wir argumentieren unter Verwendung der Tatsache, dass das standard innere Produkt auf $\mathbb{C}^n$ nicht ausgeartet ist, i.e. für alle $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ existiert ein $u \in \mathbb{C}^n$ sodass $u^* v \neq 0$. Dies liefert

$$\begin{aligned} v \in \operatorname{Ker}(L_B) &\Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{C}^n : \; u^* L_B(v) = 0 \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{C}^n : \; u^* B v = 0 \\ &\underset{(X^*)^* = X}{\overset{(XY)^* = Y^* X^*}{\Leftrightarrow}} \forall u \in \mathbb{C}^n : \; (B^* u)^* v = 0 \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{C}^n : \; \big(L_{B^*}(u)\big)^* v = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall w \in \operatorname{Im}(L_{B^*}) : \; w^* v = 0 \Leftrightarrow v \in \operatorname{Im}(L_{B^*})^\perp . \end{aligned}$$

b) Wir wollen T durch die lineare Erweiterung von $T(v_i) = w_i$ auf dem Unterraum $U = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_m\}$ und durch die triviale Abbildung auf $U^\perp$ definieren. Dies ist im Allgemeinen nicht wohldefiniert, da wir nicht angenommen haben, dass $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig sind, d.h. es ist ex ante durchaus möglich, dass zwei verschiedenene Linearkombinationen existieren, die denselben Vektor repräsentieren, welche unter Umständen unter der linearen Erweiterung auf verschiedene

Siehe nächstes Blatt!

Elemente in V abgebildet würden. Wir müssen also zeigen, dass die Abbildung unter der zusätzlichen Annahme aus der Aufgabenstellung wohldefiniert ist, d.h. falls $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ und $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{C}$ sind, sodass

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = b_1 v_1 + \dots + b_m v_m$$

gilt, dann ist auch

$$a_1 w_1 + \dots + a_m w_m = b_1 w_1 + \dots + b_m w_m.$$

Hierfür reicht es zu zeigen, dass

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0 \Rightarrow a_1 w_1 + \dots + a_m w_m = 0$$

gilt. Seien also solche $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ gegeben, dann ist

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{i=1}^m a_i w_i, \sum_{i=1}^m a_i w_i \right\rangle_W &= \sum_{i,j=1}^m \overline{a_i} a_j \langle w_i, w_j \rangle_W \\ &= \sum_{i,j=1}^m \overline{a_i} a_j \langle v_i, v_j \rangle_V \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^m a_i v_i, \sum_{i=1}^m a_i v_i \right\rangle_V = 0.\end{aligned}$$

c) Wir befolgen den Hinweis.

1. Sei $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$. Wir gehen rückwärts vor, d.h. wir angeln uns jeweils von einem einfachen Fall, wo die Aussage leicht zu zeigen ist, zum nächst komplizierteren.
   Sei zuerst $d = 1$, dann ist

   $$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + bc & b \\ c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

   wegen $1 = ad - bc = a - bc$. Somit ist die Aussage für den Spezialfall $d = 1$ gezeigt und in diesem Fall gilt die Formel $g = u_b v_c$.
   Das heisst, es reicht zu zeigen, dass Elemente $u_t \in N$ und $v_s \in N^-$ existieren, sodass $g v_s u_t$ von der obigen Form, d.h. $d = 1$, ist. Hierfür betrachten wir wieder zuerst einen Spezialfall, nämlich den Fall in welchem $c \neq 0$ ist. Man berechnet für $t = \frac{1-d}{c}$, dass

   $$g u_t = \begin{pmatrix} a & a + tb \\ c & d + tc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a + tb \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

und somit gilt die Aussage in diesem Fall, denn unter Verwendung des obigen Resultats folgt

$$g = (gu_t)u_t^{-1} = (u_{a+tb}v_c)u_t^{-1} = u_{a+tb}v_c u_{-t}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Aussage für Elemente der Form $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$ gilt. In diesem Fall ist nach Voraussetzung $1 = ad - bc = ad$ und folglich ist $d \neq 0$. Wir erhalten

$$gv_1 = \begin{pmatrix} a+b & b \\ d & d \end{pmatrix}$$

und somit gilt unter Verwendung des vorangehenden Resultats mit $t = \frac{1-d}{d}$

$$g = (gv_1)v_1^{-1} = (u_{a+b+tb}v_d u_{-t})v_1^{-1} = u_{a+b+tb}v_d u_{-t}v_{-1}.$$

2. Da $\pi(u_t) \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$, und da v ein Eigenvektor ist, also insbesondere $v \neq 0$, ist auch $\pi(u_t)v \neq 0$ und folglich $\lambda_t \neq 0$.
   Die Abbildung ist stetig, denn π ist stetig. Das heisst: Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta > 0$, sodass $\|g - u_{t_0}\|_\infty < \delta \Rightarrow \|\pi(g) - \pi(u_t)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{n}$ gilt. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t - t_0| < \delta$, dass

$$|\lambda_t - \lambda_{t_0}| = \frac{1}{\|v\|_\infty}\|\pi(u_t)v - \pi(u_{t_0})v\|_\infty \leq \frac{1}{\|v\|_\infty} n\|\pi(u_t) - \pi(u_{t_0})\|_\infty \|v\|_\infty < \varepsilon$$

   und folglich ist λ stetig an der Stelle t_0 und da $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig war, ist λ stetig.
   Um zu zeigen, dass λ ein Gruppenhomomorphismus ist, stellen wir fest dass nach Voraussetzung

$$\lambda_{s+t}v = \pi(u_{s+t})v = \pi(u_s)(\pi(u_t)v) = \lambda_t\pi(u_s)v = \lambda_s\lambda_t v$$

   gilt. Folglich ist $\lambda_{s+t} = \lambda_s\lambda_t$, denn nach Annahme ist $v \neq 0$.
3. Wir bemerken, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\pi(u_t)\pi(a_2)v =& \pi(a_2)\pi(a_2^{-1}u_t a_2)v \\
=& \pi(a_2)\pi\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{u_{4t}}\right)v \\
=& \pi(a_2)\pi\left(u_{4t}\right)v = \lambda_{4t}\pi(a_2)v.
\end{aligned}$$

   Dies zusammen mit dem vorangehenden Schritt impliziert, dass $\pi(a_2)v$ ein gemeinsamer Eigenvektor zum Eigenwert λ_t^4 ist. Es folgt aus dem Induktionsaxiom, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ der Vektor $\pi(a_2^n)v$ ein gemeinsamer Eigenvektor für $\pi(N)$ ist, zum Eigenwert $\lambda_t^{2^{2n}}$ für $\pi(u_t)$ $(t \in \mathbb{R})$.

Siehe nächstes Blatt!

Falls $\lambda_{t_0} \neq 1$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ gilt, dann ist $\lambda_{-t_0} \neq 1$, da

$$I_n = \pi(I_2) = \pi(u_{t_0})\pi(u_{-t_0}).$$

Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass $t_0 > 0$ ist. Sei $\omega_0 \in (0, 2\pi)$ mit $\lambda_{t_0} = e^{\mathrm{i}\omega_0}$ (Eigenwerte unitärer Operatoren haben Absolutbetrag gleich 1). Da $\mathbb{R}$ zusammenhängend ist und die Abbildung $t \mapsto \lambda_t$ stetig ist, existieren $t_1 \in (0, t_0)$ und ein $\omega_1 \in (0, \omega_0)$, sodass $\lambda_{t_1} = e^{\mathrm{i}\omega_1}$ gilt und $\frac{1}{2\pi}\omega_1$ nicht rational ist. Somit sind die $\lambda_{t_1}^{2^{2n}}$ alle verschieden. Andernfalls seien $n, m \in \mathbb{N}$ verschieden, sodass $\lambda_{t_1}^{2^{2n}} = \lambda_{t_1}^{2^{2m}}$, dann erhalten wir

$$1 = e^{i\omega_1(2^{2n}-2^{2m})}$$

und folglich ist $\omega_1(2^{2n} - 2^{2m}) = 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, im Widerspruch zur Irrationalität von $\frac{1}{2\pi}\omega_1$. Insbesondere sind also die Vektoren $\pi(a_2^n)v$ allesamt Eigenvektoren von $\pi(u_{t_1})$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_{t_1}^{2^{2n}}$. Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, enthält also $\mathbb{C}^n$ eine unendliche linear unabhängige Menge. Das ist absurd.
Ähnlich argumentiert man für N^{-1}. Sei w ein gemeinsamer Eigenvektor für $\pi(N^-)$ zum Eigenwert μ_t, d.h. für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\pi(v_t)w = \mu_t w$. Wie oben berechnet man

$$\pi(v_t)\pi(a_2^{-n})w = \mu_{2^{2n}t}\pi(a_2^{-n})w$$

und somit folgt auf genau dieselbe Weise, dass $\mu_t = 1$ gelten muss für alle $t \in \mathbb{R}$.

4. Die Gruppe N bzw. die Gruppe N^- kommutiert, denn

$$u_t u_s = u_{t+s} = u_{s+t} = u_s u_t, \quad v_t v_s = v_{t+s} = v_{s+t} = v_s v_t$$

und somit kommutiert auch das Bild der Gruppen, denn nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned}\pi(u_t)\pi(u_s) =& \pi(u_t u_s) = \pi(u_s u_t) = \pi(u_s)\pi(u_t),\\ \pi(v_t)\pi(v_s) =& \pi(v_t v_s) = \pi(v_s v_t) = \pi(v_s)\pi(v_t).\end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung die Matrizen $\pi(u_t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ allesamt unitär und insbesondere normal sind, ist die Menge

$$\pi(N) = \{\pi(u_t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

eine kommutative Familie diagonalisierbarer Operatoren. Wie in Serie 2, Aufgabe 5 gezeigt wurde, ist somit $\pi(N)$ *simultan diagonalisierbar*, d.h. es existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{C}^n$ bestehend aus gemeinsamen Eigenvektoren von $\pi(N)$. Nach vorangehendem Argument sind die Eigenwerte aber alle gleich 1 und somit sind alle Elemente von $\pi(N)$ ähnlich zu I_n. Da I_n nur zu sich selber ähnlich ist, ist also $\pi(N) = \{I_n\}$. Aus demselben Grund folgt auch, dass $\pi(N^-) = \{I_n\}$. Da N und N^- die Gruppe $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$ erzeugen, ist also $\pi(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})) = \{I_n\}$.

Bitte wenden!

11. Im Folgenden sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das standard hermitesche innere Produkt auf $\mathbb{C}^2$ und $\|\cdot\|$ die zugehörige Norm. Sei $Q = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SU}(2)$ beliebig. Nach Voraussetzung gilt $Q^*Q = I_2$, also $\|Q^{(1)}\| = \|Q^{(2)}\| = 1$ und $\langle Q^{(1)}, Q^{(2)} \rangle = 0$. Insbesondere also $Q^{(1)} \in S^3$. Wir behaupten, dass die Abbildung $\mathrm{SU}(2) \to S^3$, $Q \mapsto Q^{(1)}$ ein Homöomorphismus ist. Die lineare Abbildung $\mathbb{C}^4 \cong M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^2$, $A \mapsto A^{(1)} = Ae_1$ ist stetig, denn

$$\|Ae_1 - Be_1\| \leq \max\{|A_{ij} - B_{ij}| \mid 1 \leq i, j \leq 2\} = \|A - B\|_\infty.$$

Somit ist aber auch die Einschränkung $\mathrm{SU}(2) \to \mathbb{C}^2$ stetig (siehe Wichtige Übung 3.50 im Analysisskript) und weil ihr Bild in S^3 enthalten ist, auch die induzierte Abbildung $\mathrm{SU}(2) \to S^3$.

Es bleibt zu zeigen, dass die Abbildung bijektiv und die Inverse stetig ist.

Injektivität: Wir zeigen, dass $Q \in \mathrm{SU}(2)$ durch $Q^{(1)}$ eindeutig bestimmt ist. Tatsächlich gilt $Q^{(2)} \perp Q^{(1)}$ und somit ist $Q^{(2)} \in (Q^{(1)})^\perp$. Zudem ist $\dim(Q^{(1)})^\perp = 1$, da $Q^{(1)} \neq 0$. Sei $(Q^{(1)})^\perp = \langle v \rangle$ für ein $v \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Dann ist $\{Q^{(1)}, v\}$ eine Basis von $\mathbb{C}^2$, da $\mathbb{C} = \langle Q^{(1)} \rangle \oplus \langle v \rangle$ und somit $\det(Q^{(1)}, v) \neq 0$. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig, dann gilt

$$\det(Q^{(1)}, \lambda v) = \lambda \det(Q^{(1)}, v)$$

und somit existiert genau ein $\lambda \in \mathbb{C}$, sodass $1 = \det(Q^{(1)}, \lambda v)$ und es folgt $Q^{(2)} = \lambda v$.

Surjektivität: Sei $v \in \mathrm{S}^3$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass ein $w \in \mathbb{C}^2$ existiert, sodass $(v, w) \in \mathrm{SU}(3)$ gilt. Nach dem Steinitz'schen Austauschsatz existiert ein $\hat{w} \in \{e_1, e_2\}$, sodass $\{v, \hat{w}\}$ eine Basis von $\mathbb{C}^2$ ist. Wir wenden das Gram-Schmidt Verfahren auf die geordnete Basis $(v, \hat{w})$ an und erhalten eine ONB $(v, \tilde{w})$ von $\mathbb{C}^2$. Die Matrix $\tilde{Q}$ gegeben durch $\tilde{Q}^{(1)} = v$ und $\tilde{Q}^{(2)} = \tilde{w}$ ist unitär, denn

$$\tilde{Q}^*\tilde{Q} = \begin{pmatrix} v^*v & v^*\tilde{w} \\ \tilde{w}^*v & \tilde{w}^*\tilde{w} \end{pmatrix} = I_2$$

nach Konstruktion. Zudem ist $1 = \det(\tilde{Q}^*\tilde{Q}) = \overline{\det(\tilde{Q})}\det(\tilde{Q}) = |\det(\tilde{Q})|^2$. Sei $\lambda = \det(\tilde{Q})$ und $w = \lambda\tilde{w}$. Da $|\lambda| = 1$, ist (v, w) eine ONB von $\mathbb{C}^2$ und somit die Matrix Q mit $Q^{(1)} = v$, $Q^{(2)} = w$ ebenfalls unitär. Des Weiteren gilt

$$\det(Q) = \det(v, w) = \overline{\lambda}\det(v, w) = \overline{\det(\tilde{Q})}\det(\tilde{Q}) = 1$$

und somit $Q \in \mathrm{SU}(2)$. Wir haben also ein Element $Q \in \mathrm{SU}(2)$ gefunden, sodass $Q^{(1)} = v$. Da $v \in S^3$ beliebig war, ist die Abbildung also surjektiv.

Stetigkeit der Inversen: Sei $\delta = \frac{1}{3}\|e_1 - e_2\|$ und es bezeichne $B_\delta(v)$ den Ball von Radius δ um $v \in \mathbb{C}^2$. Auf der abgeschlossenen Menge $D_1 = S^3 \setminus B_\delta(e_1)$ ist die inverse Abbildung – wie oben beschrieben – gegeben durch

$$i_1 : v \mapsto \left(v, \frac{\det\left(v, \frac{1}{\|e_1 - \langle e_1, v\rangle v\|}(e_1 - \langle e_1, v\rangle v)\right)}{\|e_1 - \langle e_1, v\rangle v\|}(e_1 - \langle e_1, v\rangle v)\right)$$

Siehe nächstes Blatt!

und somit stetig als Verknüpfung stetiger Abbildungen.
Auf $D_2 = S^3 \setminus B_\delta(e_2)$ ist die inverse Abbildung gegeben durch

$$i_2 : v \mapsto \left(v, \frac{\det\left(v, \frac{1}{\|e_2 - \langle e_2, v\rangle v\|}(e_2 - \langle e_2, v\rangle v)\right)}{\|e_2 - \langle e_2, v\rangle v\|}(e_2 - \langle e_2, v\rangle v)\right)$$

und somit stetig als Verknüpfung stetiger Abbildungen.
Es ist $S^3 = D_1 \cup D_2$ und die beiden Abbildungen stimmen auf $D_1 \cap D_2$ überein, da sie die eindeutigen Inversen der Abbildung $Q \mapsto Q^{(1)}$ sind. Somit ist die Inverse, gegeben durch

$$i(v) = \begin{cases} i_1(v) & \text{falls } v \neq e_1 \\ i_2(v) & \text{sonst} \end{cases}$$

stetig nach Übung 9.40 im Analysisskript.